Cuadernos Teorema

VOLÚMENES APARECIDOS

A. M. Turing
¿PUEDE PENSAR UNA MÁQUINA?

J. Lukasiewicz
PARA UNA HISTORIA DE LA LÓGICA DE ENUNCIADOS

E. W. Beth
LAS PARADOJAS DE LA LÓGICA

DE INMEDIATA APARICIÓN

A. J. Ayer, E. Gellner, I. V. Kuznetsov
FILOSOFÍA Y CIENCIA

VOLÚMENES EN PRENSA

P. K. Feyerabend
CÓMO SER UN BUEN EMPIRISTA

G. Gentzen
INVESTIGACIONES SOBRE LA DEDUCCIÓN LÓGICA

J. Habermas
COMUNICACIÓN Y COMPETENCIA

Cuadernos Teorema

EVERT W. BETH

Las paradojas de la Lógica

Presentación, versión al castellano y notas
por
JUAN MANUEL LORENTE

Con una selección de textos y bibliografía
realizada por
AMADOR ANTÓN

DEPARTAMENTO DE LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
UNIVERSIDAD DE VALENCIA
1975

Este artículo apareció originalmente bajo el título "The Paradoxes of Logic and Set Theory and their Solution" en el libro de Evert W. Beth THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS. A study in the philosophy of science, *págs. 479-518, editado el año 1965 (segunda edición revisada) en Amsterdam por la casa North-Holland, que ha cedido a Teorema los derechos de la presente versión castellana.*

PRINTED IN SPAIN

IMPRESO EN ESPAÑA

I.S.B.N. 84-600-1881-4

DEPÓSITO LEGAL: V. 1.789 - 1975

ARTES GRÁFICAS SOLER, S. A. - JÁVEA, 28 - VALENCIA (8) - 1975

Tres crisis, como señala Fraenkel, han amenazado los cimientos de la matemática y, más que suponer un freno, la han hecho avanzar por un camino más seguro. La primera surge con los griegos, ante la imposibilidad de medir, en función de su lado, la diagonal de un cuadrado de lado uno; para superarla se crean los números irracionales, que serán ulteriormente parte de la teoría de los reales. No obstante, será solamente en el siglo XIX (segunda crisis) cuando se intenta fundamentar los números reales en función de los enteros; gracias a ello surgen las cortaduras de Dedekind y las sucesiones de Cauchy. La tercera crisis tiene lugar con la aparición de las paradojas, sobre las cuales se ha escrito y hablado muchas veces, aunque casi nunca de forma satisfactoria y exhaustiva. Una de las pocas excepciones a esta regla es el presente artículo, obra del gran lógico holandés E. W. Beth, que nos brinda una rigurosa y detallada exposición de la amenaza que supuso para las ciencias formales el descubrimiento de las paradojas y del progresivo avance de esas ciencias al aplicárseles la conveniente terapia.

En el tratamiento del tema podemos distinguir tres partes. La primera (secciones 1-13) se consagra a la exposición de las paradojas "genuinas" siguiendo, más o menos, el criterio de Ramsey, con el que más adelante se mostrará conforme el autor explícitamente.

La segunda parte (secciones 14-17) aborda el estudio de los principales intentos de solución de las paradojas. Los intuicionistas, para evitar las paradojas, proponen una

revisión de métodos y fundamentos, eliminando los principios lógicos "molestos" (tercio excluso), mientras que los formalistas intentan una formalización axiomática de las matemáticas para probar su consistencia sin rechazar los principios clásicos (sin embargo Gödel, siguiendo a Richard pero evitando la falacia de su paradoja, demuestra (1931) que la aritmética es inconsistente o bien incompleta). La teoría de tipos de Russell, tanto en la forma ramificada original como en la forma simple posterior, asume una jerarquización de niveles por la cual todo aquello que una proposición afirma sobre sí misma forma parte de un nivel superior. Beth se muestra de acuerdo con la división de Ramsey entre paradojas sintácticas, para las que apunta la solución de Russell y/o Zermelo, y paradojas semánticas, respecto de las cuales conviene advertir que la distinción ya clásica de lenguaje y metalenguaje, debida a Tarski, es solución suficiente, sin que, por lo demás, nos obligue a aceptar que tengan algo que ver con lo empírico.

En la tercera parte (secciones 18-26) el autor considera desarrollos más recientes sobre las paradojas. Afirma con Behmann que las paradojas ocurren al no sustituir el término definido por su "definiens" (condición de Pascal, que Beth reemplaza por otra menos fuerte). Las NF de Quine constituyen otro intento de solventar las paradojas que Hao Wang hubo de reforzar para evitar la paradoja de Burali-Forti.

El tratamiento de las paradojas semánticas, a diferencia de las sintácticas, exige, en un sistema formal, una definición de conceptos metalógicos tales como verdad, falsedad, definibilidad, etc., cuyo desarrollo en estas páginas es quizás insuficiente.

Las crisis de fundamento son la piedra de toque que separa la ciencia de la pseudo-ciencia. No es de extrañar, por tanto, que la aparición de las paradojas no haya tenido como consecuencia el colapso de la lógica y la matemática, sino, por el contrario, uno de sus más brillantes desarrollos.

J. M. LORENTE

Contenido

Págs.

[A. LAS PARADOJAS CLÁSICAS]

Introducción ... 9
1. Enumeración de las paradojas ... 10
2. La paradoja de Russell ... 12
3. La paradoja del máximo número cardinal ... 13
4. La paradoja de Burali-Forti ... 13
5. La paradoja del mentiroso ... 14
6. La paradoja de Grelling ... 16
7. La paradoja de Berry ... 16
8. La paradoja de Richard ... 17
9. La paradoja de Zermelo-König ... 18
10. La paradoja de Skolem-Löwenheim ... 19
11. La paradoja de la denotación ... 22
12. La llamada paradoja del barbero ... 23
13. Observaciones históricas ... 25

[B. PRINCIPALES INTENTOS DE SOLUCIÓN DE LAS PARADOJAS CLÁSICAS]

14. La interpretación intuicionista de las paradojas ... 28
15. El punto de vista cantorista ... 29
16. La teoría de tipos lógicos ... 32
17. Paradojas lógicas y semánticas ... 39

[C. NUEVOS DESARROLLOS]

18. Observaciones de Behmann ... 44
19. Resultado de Bochvar ... 46
20. El axioma de reducibilidad ... 47

Págs.

21. Las investigaciones de Quine 48
22. Otros sistemas 51
23. Análisis de las paradojas semánticas 52
24. La paradoja de Skolem-Löwenheim 57
25. Las paradojas de la denotación y del análisis 60
26. Conclusión 63

APÉNDICE: SELECCIÓN DE TEXTOS

Paradoja de Burali-Forti (1897) 65
Paradoja de Cantor (1899) 66
Paradoja de Richard (1905) 69
Paradoja de Russell 70

BIBLIOGRAFÍA 73

[A. LAS PARADOJAS[1] CLÁSICAS]

Introducción

Hace aproximadamente medio siglo, el mundo de la ciencia se sobresaltó por el descubrimiento, totalmente inesperado, de un cierto número de paradojas que parecían amenazar los fundamentos mismos de la lógica y de las matemáticas. Este descubrimiento fue, como es natural, particularmente doloroso para matemáticos y lógicos tales como Cantor, Dedekind, y Frege que habían dedicado una importante parte de su obra a establecer, para el edificio de la matemática pura, una fundamentación y una estructura que satisficiera los requisitos de la lógica más exigente.

Después de cincuenta años de creciente familiaridad, los matemáticos y los lógicos ya no están dema-

[1] Se entiende tradicionalmente por paradoja (etimológicamente: παρά + δόξα, fuera de la opinión) un enunciado que va en contra de la opinión generalmente aceptada. Una paradoja en su forma más extrema o antinomia (ἀντί + νόμος, contrario a la ley o costumbre) consiste en la equivalencia aparente de dos proposiciones, una de las cuales es la negación de la otra. En lógica moderna ambos términos se consideran sinónimos; en un sentido más preciso: una paradoja lógica o antinomia consta de dos proposiciones contrarias o incluso contradictorias a las que llegamos por un argumento aparentemente válido. [T.]

siado impresionados por las paradojas; en cierta medida, han aprendido incluso a obtener provecho de ellas, como en principio recomendó H. Poincaré. En realidad, muchos de los resultados más profundos en lógica moderna han surgido del análisis de las paradojas.

1. Enumeración de las paradojas

Parece deseable dar una enumeración cronológica completa de las paradojas antes de entrar en un tratamiento más sistemático.

(1) *Paradoja del mentiroso,* que ya fue conocida en la antigüedad.

(2) Paradoja de Burali-Forti (1897), que inquietó a Cantor por los años 1895.

(3) *Paradoja del número cardinal máximo,* descubierta por Cantor en 1895, pero publicada precisamente en 1932 con su correspondencia.

(4) Paradoja de Russell (1903) descubierta, independientemente, al mismo tiempo por E. Zermelo.

(5) Paradoja de Richard (1905), relacionada con el trabajo de H. Lebesgue (1905) sobre *funciones analíticamente representables.*

(6) Paradoja de Zermelo-König (1905).

(7) *Paradoja de la denotación* (Russell, 1905), relacionada con la *paradoja del análisis.*

(8) Paradoja de Berry, que es una forma simplificada de la paradoja de Richard publicada por Russell en 1906.

(9) Paradoja de Grelling, publicada por Nelson y Grelling en 1908 (esta paradoja es atribuida algunas veces, erróneamente, a H. Weyl).

(10) La (así llamada) *paradoja del barbero* (Russell, 1918), de la cual hay en circulación numerosas variantes.

(11) La paradoja de Skolem-Löwenheim (1923).

(12) La *paradoja del análisis* (G. E. Moore, 1942).

En la siguiente discusión de las paradojas no respetaremos el orden cronológico, ya que, naturalmente, es preferible una ordenación más sistemática. Pero la enumeración anterior mostrará fácilmente el estado de alarma que reinó en el mundo de los lógicos y matemáticos durante la primera década de este siglo, a pesar de muchas brillantes realizaciones.

Durante estos últimos años se han establecido nuevas paradojas, a saber:

(13) Una nueva versión de la paradoja de Russell (R. L. Stanley 1953; v. H. B. Curry 1942).

(14) La paradoja de la clase de *todos los conjuntos fundados* (Shen Yuting, 1953, v. R. Montague, 1955).

(15) La paradoja de Russell en lógicas polivalentes (Moh Shaw-Kwei, 1954).

(16) Paradoja de Geach-Löb (P. T. Geach, 1955; H. Löb, 1955; v. L. Henkin, 1951; G. Kreisel, 1953; Hao Wang, 1955).

(17) Dos paradojas semánticas (Shen Yuting, 1955)

A estas paradojas les asignamos un lugar diferente, ya que su situación histórica difiere de las paradojas "*clásicas*" (1) - (12). Es cierto que, de por sí, están íntimamente relacionadas con las antiguas. Sin embargo, como fueron construidas con el propósito de explicar ciertos resultados metamatemáticos, su descubrimiento no vino por sorpresa y no era de esperar que tuvieran serias repercusiones. Por ello, aun cuando las recientes paradojas mencionadas tienes un interés de suyo propio, nos abstendremos de tratarlas.

2. La paradoja de Russell

Esta famosa paradoja se explica mejor si se establece mediante símbolos lógicos. Por tanto, introducimos expresiones atómicas *x (y)* para expresar el significado de que un objeto, denotado por *y*, está contenido en una clase, denotada por *x*.

De acuerdo con el punto de vista platónico, las clases son "*condensamientos*" o "*sustancializaciones*", es decir, se considera que ellas mismas son objetos o unidades de las que, por lo tanto, puede decirse que están o no contenidas en una cierta clase dada.

Con este presupuesto, podemos introducir ahora una cierta clase, llamada *r*, mediante la definición:

$$(1) \qquad r(x) \Longleftrightarrow \overline{x(x)}.$$

Esta es la famosa clase de Russell, de la que una clase arbitraria es un miembro si y sólo si no es un miembro de sí misma. Basándonos en esta definición, podemos establecer:

$$(2) \qquad (x)[r(x) \Longleftrightarrow \overline{x(x)}].$$

Ahora bien, debido a la sustancialización (o condensación) de las clases, la clase de Russell se presenta ella misma entre los valores que pueden darse a la variable ligada *x*, y por tanto obtenemos:

$$(3) \qquad r(r) \Longleftrightarrow \overline{r(r)}.$$

Este enunciado comporta las conclusiones:

$$(4) \qquad \overline{r(r)} \rightarrow r(r) \qquad \text{y} \qquad r(r) \rightarrow \overline{r(r)},$$

de donde derivamos respectivamente:

$$(5) \qquad r(r) \qquad \text{y} \qquad \overline{r(r)}. \ *$$

De este modo nos encontramos con una contradicción formal. La paradoja de Russell es, por así decirlo, el prototipo de un conjunto de paradojas; en efecto, existen series de definiciones cada una de las cuales da origen a una contradicción formal, por ejemplo:

$$r'(x) \Longleftrightarrow (y)[\overline{x(y) \ \& \ y(x)}],$$
$$r''(x) \Longleftrightarrow (y)(z)[\overline{x(y) \ \& \ y(z) \ \& \ z(x)}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r^{0}(x) \Longleftrightarrow (y)[x = y \rightarrow \overline{y(x)}],$$
$$r^{00}(x) \Longleftrightarrow (y)(z)[(x = y \ \& \ y = z) \rightarrow \overline{z(x)}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. La paradoja del número cardinal máximo

Esta paradoja se produce cuando consideramos el conjunto *m* de todos los conjuntos. Obviamente, su número cardinal *NC(m)* es el más grande que puede existir. Por otra parte, consideremos el conjunto $\mathfrak{P}(m)$ de todos los subconjuntos de *m*. Según un teorema bien conocido de teoría de conjuntos, el número cardinal $NC(\mathfrak{P}(m))$, de este último conjunto debe ser mayor que el número cardinal *NC(m)* del propio *m*.

Aunque oficialmente la paradoja de Cantor permaneció inédita hasta 1932, el rumor de su descubrimiento se difundió con rapidez y, ya en junio de 1901, llegó a oídos de Russell, el cual estableció entonces una paradoja de su propiedad, presentando una estructura

---

* La derivación consiste en obtener: (2) a partir de (1) por introducción de generalizador; (3) por eliminación de generalizador; (4) por definición de coimplicador; y (5) por doble modus ponens y eliminando respectivamente, por absurdo, $\overline{r(r)}$ y $r(r)$. [T.]

lógica aún más simple, de la cual ya se ha hablado en la sección precedente.

4. La paradoja de Burali-Forti

Según otro teorema fundamental, probado por Cantor, todo conjunto de números ordinales, si se ordena progresivamente, está bien ordenado. Ahora consideremos el conjunto b de *todos* los números ordinales. Si el conjunto b está ordenado progresivamente, estará bien ordenado; sea $u=NO([b, <^o])$ [2] su número ordinal.

Tomemos el conjunto $h(u)$ de todos los números ordinales hasta u. Este conjunto, si está ordenado progresivamente, estará a su vez bien ordenado. Sea $v=NO([h(u), <^o])$ su número ordinal. Por un teorema general de teoría de conjuntos, tenemos entonces:

$$v = u + 1. \tag{1}$$

Por otra parte, como $h(u)$ es obviamente un subconjunto de b, tenemos:

$$v <^o u \text{ ó } v=u. \tag{2}$$

Sin embargo, (1) da lugar a:

$$u <^o v, \tag{3}$$

y las conclusiones (2) y (3) son formalmente inconsistentes con el hecho de que $<^o$ es una relación de orden.

Hay una íntima conexión entre las paradojas de Cantor y de Burali-Forti: la paradoja de Cantor se produce si consideramos el conjunto de todos los conjuntos, la paradoja de Burali-Forti, si consideramos el conjunto de todos los números ordinales.

[2] Se usa el signo $<^o$ para denotar la relación de orden entre conjuntos.

5. La paradoja del mentiroso

Epiménides, el cretense, dice: "*Yo estoy mintiendo*". ¿Miente o dice la verdad?

Supongamos que está mintiendo. Entonces lo que dice no puede ser verdad y, como dice que está mintiendo, consecuentemente dice la verdad.

Supongamos que dice la verdad. Entonces lo que dice debe ser verdad y, como dice que está mintiendo, consecuentemente está mintiendo.

Por tanto, ambos términos de nuestra alternativa producen una autocontradicción; tropezamos así con una inconsistencia formal.

Con el fin de evitar "soluciones" demasiado simplistas de la paradoja del mentiroso, parece deseable darle una forma algo más concreta. Consideremos el siguiente enunciado:

El enunciado hecho en el artículo "Las Paradojas de la Lógica" de Evert W. Beth, sección 5, y que dice "El enunciado... es falso" es falso.

De nuevo nos sentimos forzados a inferir que este enunciado, si suponemos que es falso, debe ser verdadero, y que, por otra parte si suponemos que es verdadero, debe ser falso.

La primera reacción natural ante la paradoja del mentiroso es achacar la contradicción al hecho de que el enunciado hace referencia a sí mismo, y establecer, consecuentemente, como un principio básico del uso correcto del lenguaje, que no puede ser construido un enunciado, o, al menos, ser seriamente discutido, si hace referencia a sí mismo. Sin embargo, el mero hecho de la auto-referencia, aunque parezca extraño, no puede proporcionarnos una explicación satisfactoria de la aparición de nuestra paradoja. De hecho, existen, otros casos en los que la auto-referencia es totalmente inofensiva. Tomemos, por ejemplo, la frase:

El enunciado, hecho en el artículo "Las Paradojas de la Lógica" de Evert W. Beth, sección 5, y que dice "El enunciado... a sí mismo", se refiere a sí mismo.

Es obvio que este enunciado debe considerarse como verdadero.

6. La paradoja de Grelling

Denominamos a un adjetivo *autológico*, si puede ser aplicado válidamente a sí mismo; *heterológico*, si no lo puede ser.

De acuerdo con estas definiciones, los adjetivos "español" y "polisílabo" son autológicos, mientras que los adjetivos "frances", "monosílabo", "rojo" son heterológicos. Ahora preguntamos si el adjetivo "heterológico" ha de considerarse como autológico o como heterológico. Obviamente, si suponemos que es heterológico, puede aplicarse válidamente a sí mismo y, por tanto, debe ser autológico y *viceversa*.

7. La paradoja de Berry

Es una simplificación muy instructiva e ingeniosa de la paradoja de Richard.

Supóngase que damos un léxico que contiene toda palabra que de hecho ocurre en el texto del presente artículo; el número de palabras contenidas en este léxico será necesariamente finito; siendo considerados como palabras los nombres de personas y símbolos lógicos y matemáticos empleados. Consideremos el conjunto P de todos los enunciados que contienen a lo sumo 50 palabras, todas las cuales forman parte de nuestro léxico. El conjunto P será también finito.

Introducimos ahora el conjunto Q de todos los enunciados que están contenidos en P y que definen

un número natural. El conjunto Q, al ser subconjunto de P, será *a fortiori* finito.

Finalmente, consideremos el conjunto R de todos los números naturales que están definidos mediante un enunciado de Q. El conjunto R será finito; consecuentemente, existen números naturales que no están contenidos en R, y entre estos números naturales debe haber uno que es el primero de acuerdo con la ordenación usual de los números naturales.

Este número natural se denominará el *número de Berry*. Consideremos ahora el enunciado:

El número de Berry es el primer número, de acuerdo con la ordenación usual de los números naturales, que no puede definirse mediante un enunciado que contenga como máximo cincuenta palabras, todas ellas pertenecientes a nuestro léxico.

Está claro que este enunciado constituye una definición correcta del número de Berry.

Sin embargo, no contiene más que 37 palabras, pertenecientes todas a nuestro léxico y, por tanto, estará contenido en P. Como constituye la definición de un número natural, también estará contenido en Q. Consecuentemente, el número de Berry, del cual constituye una definición, debe estar contenido en R.

Por otra parte, por definición, el número de Berry no puede estar contenido en R. Por tanto, estamos otra vez en una contradicción formal.

8. La paradoja de Richard

Consideremos ahora el conjunto S que consta de todos los enunciados que contienen un número finito de palabras, todas pertenecientes a nuestro léxico, y que definen un número real $r(0 < r < 1)$. Sea T el conjunto de todo los números reales definidos por enunciados de S.

Los conjuntos S y T ya no son finitos. Son, sin embargo, infinitos enumerables. [3]

Introducimos el procedimiento de la diagonal de Cantor, que puede describirse como sigue. Sea A cualquier conjunto infinito enumerable de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$; sea d_{pq} el q-ésimo dígito en la representación decimal de a_p. Construimos el número real $D(A)$ tomando como p-ésimo dígito en su representación decimal el número $d_p = d_{pp} + 2$ (base 10). Naturalmente, el número $D(A)$ no puede estar contenido en el conjunto A. Ahora podemos aplicar el procedimiento de la diagonal de Cantor al conjunto T; el número real $D(T)$ resultante de esta aplicación será denominado el *número de Richard* ρ.

Consideremos el enunciado:

El número de Richard ρ, *es el número real que resulta de aplicar el procedimiento de la diagonal de Cantor al conjunto enumerable infinito T de los números reales r que satisfacen la condición* $0 < r < 1$ *y que pueden ser definidos mediante enunciados que contienen un número finito de palabras, pertenecientes todas a nuestro léxico.*

Este enunciado, que constituye una definición correcta del número de Richard ρ, está, obviamente, contenido en el conjunto S y, por tanto, el número de Richard ρ, que él define, estará contenido en el conjunto T. Por otra parte, por su definición, el número de Richard ρ no puede estar contenido en el conjunto T. Así, nos estamos enfrentando con una nueva paradoja.

[3] Los conjuntos infinitos se clasifican en enumerables y no-enumerables. Se dice que un conjunto infinito es enumerable si puede ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales. Conjunto infinito no-enumerable es el que no admite tal correspondencia por tener un grado mayor, por así decirlo, de infinitud; ejemplo de este último es el conjunto de los números reales. [T.]

9. La paradoja de Zermelo-König

Consideramos de nuevo el conjunto T de los números reales r $(0 < r < 1)$, que pueden ser definidos mediante un enunciado que contiene un número finito de palabras, todas ellas pertenecientes a nuestro léxico. Como el conjunto T es solo enumerable infinito, existen ciertamente números reales r $(0 < r < 1)$ no contenidos en T; sea T' el conjunto de estos números. Por el teorema de buena ordenación de Zermelo, el conjunto de todos los números reales puede estar bien ordenado. Sea el número de Zermelo-König ρ' el primer elemento del conjunto T' de acuerdo con esta buena ordenación.

Consideraremos ahora la sentencia:

El número de Zermelo-König ρ', *es el primer elemento, de acuerdo con la buena ordenación del contínuo de Zermelo, del conjunto T' de los números reales r que satisfacen la condición* $0 < r < 1$ *y que no puede ser definido por una sentencia que contenga un número finito de palabras, pertenecientes todas a nuestro léxico.*

Este enunciado está contenido en el conjunto S y consecuentemente el número ρ' de Zermelo-König debe estar contenido en el conjunto T. Por otra parte, a causa de su definición, el número ρ' no puede estar contenido en el conjunto T.

Este argumento fue en principio expuesto por König para refutar la hipótesis del continuo de Cantor. Sin embargo, pronto perdió su valor a este respecto con motivo del descubrimiento de la paradoja de Richard, que es enteramente independiente de la hipótesis del continuo y del teorema de buena ordenación.

10. La paradoja de Skolem-Löwenheim

De acuerdo con el teorema de Löwenheim-Skolem, un sistema infinito enumerable de axiomas que está formalizado por medio de la lógica elemental y que es consistente respecto a procedimientos de deducción basados sobre este sistema lógico, puede realizarse mediante un modelo finito o infinito enumerable.

Ahora bien, Skolem ha mostrado que los sistemas de axiomas para la teoría clásica de conjuntos establecidos por Skolem, Fraenkel, y von Neuman pueden formalizarse por medio de un conjunto enumerablemente infinito de expresiones de la lógica elemental. Por tanto, si suponemos que estos sistemas son consistentes respecto a los procedimientos de deducción basados en la lógica elemental, satisfarán entonces la hipótesis del teorema de Löwenheim-Skolem. De ello se sigue que cualquiera de estos sistemas axiomáticos puede realizarse mediante un modelo enumerablemente infinito (excluyéndose, por razones triviales, la realización por medio de un modelo finito).

Verdaderamente ésta es una conclusión de lo más sorprendente, ya que los sistemas de axiomas han sido establecidos para crear una base segura sobre la que operar con conjuntos de número cardinal mayor que los enumerablemente infinitos.

A causa del teorema de Löwenheim-Skolem y el teorema de deducción, los teoremas de la teoría clásica de conjuntos que se consideran normalmente que proporcionan una descripción adecuada de las propiedades de conjuntos no-enumerables infinitos, pueden ser realizados mediante conjuntos enumerablemente infinitos. Por ejemplo, los teoremas que en la teoría clásica de conjuntos se considera que describen la estructura del continuo y que le atribuyen un número cardinal mayor que lo enumerablemente infinito, si los consideramos desde el punto de vista de la metamatemática, resultan ser susceptibles de realización mediante modelos enumerablemente infinitos.

Consecuentemente, aunque los axiomas de la teoría de conjuntos tiendan implícitamente a postular la existencia de números cardinales mayores que los enumerablemente infinitos, pueden ser realizados por medio de sistemas enumerablemente infinitos de conjuntos enumerables.

Este resultado lo interpreta correctamente Skolem apuntando a una relativización de la común jerarquía de los números cardinales; dos conjuntos que respecto de un dominio fundamental dado D tienen números cardinales diferentes, pueden tener el mismo número cardinal respecto de otro dominio fundamental D'.

Nuestro análisis de la paradoja de Löwenheim-Skolem permitirá ver con toda claridad que su importancia es básica, no sólo para la axiomatización de la teoría de conjuntos, sino también para la metodología de las ciencias deductivas en general. Dediquemos aquí unas pocas palabras a sus implicaciones respecto a la conocida concepción de un sistema axiomático como una definición implícita de un sistema matemático. Esta concepción está cimentada en Hilbert (1899) y adoptada por muchos otros autores, por ejemplo, por Couturat (1905) y por Cavaillès (1938).

En *Entretiens d'Amersfoort* (1938), observó Tarski, divergiendo de M. Barzin, que esta concepción involucra una extensión considerable de la noción de una definición.

En una recensión de la edición de M. Steck de una carta en la que Frege establecía un cierto número de objeciones a las opiniones de Hilbert, Bernays (1942) argüía que, de cualquier modo, los axiomas de la geometría plana euclídea —por tomar un ejemplo

concreto— no puede considerarse que definan las nociones de un punto o una línea recta en el sentido de la geometría plana euclídea; más bien, definen el conjunto de todos los sistemas de entidades que satisfacen estos axiomas, es decir, el conjunto de todos los modelos para estos axiomas. Si el conjunto de axiomas fuera categórico, constituiría al menos una caracterización única de la estructura común de estos modelos; sin embargo, la paradoja de Skolem-Löwenheim revela que ningún conjunto de axiomas puede ser categórico, a pesar de las pruebas de categoricidad de Hilbert y otros.

Una reciente publicación de L. Henkin soluciona este enigma: en los casos en los que puede darse una prueba de categoricidad, todos los modelos estandar son isomórficos; las pruebas de categoricidad no cubren el caso de los modelos no-estandar. Veremos, sin embargo, que la noción de un modelo estandar tiene en sí un carácter relativo, debido a la no-categoricidad de los axiomas de la teoría de conjuntos. [4]

11. La paradoja de la denotación

Esta paradoja —también conocida como la antinomia de la relación nombre— muestra que el método corriente de distinguir entre uso y mención [5] de un

[4] Un modelo de una teoría T es una estructura interpretativa en la que son verdaderas todas las sentencias válidas de T. Un sistema formal es llamado categórico si todos sus modelos son isomórficos entre sí, un ejemplo de ello es el sistema de la aritmética elemental. Los modelos de cálculos de segundo orden y de orden más elevado que corresponden a la interpretaciones principales son llamados estandar, siendo no-estandar los modelos generales que corresponden a interpretaciones secundarias. [T.]

[5] Un signo es *usado* cuando se le emplea teniendo en cuenta su significado, y es *mencionado* cuando se refiere a sí mismo. De esta forma el signo "lápiz" es usado en: *el lápiz termina en punta de grafito* y es mencionado en "*lápiz*" *termina en z*. (En lógica moderna se ha generalizado la convención de encerrar entre comillas los signos cuando son mencionados). [T.]

símbolo mediante comillas debe aplicarse con alguna discriminación.

El siguiente tipo de inferencia:

$$\frac{\begin{array}{c}\log\ 343 > 2 \\ 343 = 7^3\end{array}}{\log\ 7^3 > 2}$$

se aplica corrientemente y se ajusta completamente a los patrones aceptados de rigor lógico.

Consideremos, sin embargo, la inferencia similar:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{"343" contiene tres figuras} \\ 343 = 7^3\end{array}}{\text{"}7^3\text{" contiene tres figuras}}$$

Esta inferencia, aunque aparentemente es del mismo tipo y parte de premisas ciertas, conduce a una conclusión manifiestamente falsa.

Esta paradoja ha sido discutida recientemente por R. Carnap, A. Church, W. V. Quine, y B. Russell.

12. La llamada paradoja del barbero

Se supone que el concejo de un pueblo ha promulgado una ley que obliga a cualquier habitante varón del municipio, que no se afeite a sí mismo, que sea afeitado por el barbero del pueblo. Al mismo tiempo, al barbero le está estrictamente prohibido afeitar a cualquier persona del pueblo que tenga el hábito de afeitarse ella misma. Obviamente, el barbero del pueblo estará en un dilema: si no tiene el hábito de afeitarse él mismo, estará obligado a hacerlo; si toma el hábito de afeitarse a sí mismo, le será estrictamente prohibido.

Sería superfluo detenerse en esta supuesta paradoja que fue inventada sólo por razones didácticas (hay otras ilustraciones similares que prefiero omitir, aunque alguna de ellas resulta particularmente instructiva) si no hubiera sido considerada muy en serio por algunos hombres de ciencia, y si, por otra parte, no nos proporcionara aclarar, por contraste, el carácter peculiar de las auténticas paradojas.

El dilema del barbero, realmente, no constituye el dilema de un lógico. La hipótesis de que un concejo de un pueblo promulgue una ley absurda no es en sí contradictoria. Aunque ello puede motivar problemas difíciles de carácter legal, no da lugar, sin embargo, a problemas lógicos. En la paradoja del mentiroso, por ejemplo, estamos en una situación completamente diferente. También es aquí cierto que el supuesto de que Epiménides el cretense o el presente autor emitan un enunciado absurdo no es algo contradictorio en sí mismo. La lógica se haya involucrada sólo por la circunstancia de que los enunciados en cuestión tratan con las nociones de verdad y falsedad y porque estas nociones resultan ser, en este caso, inaplicables, siendo, por el contrario, su aplicabilidad —sin restricciones y ambigüedades— uno de los postulados fundamentales de la lógica común.

El rasgo común de las auténticas paradojas, que las distingue de las pseudoparadojas como la paradoja del barbero, y del cual toman su carácter peculiar y serio, reside en el hecho de que, sin excepción, sobrepasan los límites de las nociones más fundamentales de la lógica y de la matemática; ciertamente, la paradoja de Russell afecta a la noción de clase o relación; la paradoja de Cantor, a la noción de número cardinal; la paradoja del mentiroso, a las nociones de verdad y falsedad; la paradoja de Grelling, a la noción de la aplicación válida de una palabra; la paradoja de

Berry, a las nociones de definición y de infinito enumerable; la paradoja de Richard a las nociones de definición y enumerablemente infinito, así como al procedimiento de la diagonal de Cantor; la paradoja de Zermelo-König, a las nociones de definición, de infinito enumerable y no-enumerable, y de buena ordenación; la paradoja de Skolem-Löwenheim, a las nociones de modelo y categoricidad, así como a la concepción de un sistema de axiomas en tanto que constitutivo de una definición implícita; la paradoja de denotación, a las nociones de denotación y designación.

Por esta razón, el descubrimiento de las paradojas de la lógica y de la matemática ha provocado una crisis en la lógica así como en la teoría de conjuntos, constituida esta última en un rival de la lógica como doctrina de fundamentación y punto de partida de la matemática. De hecho, estas paradojas amenazan todo el edificio de la ciencia deductiva y, especialmente de la lógica y de la matemática.

13. Observaciones históricas

El descubrimiento de las paradojas de la lógica y de la matemática no es un hecho sin precedentes en la historia del pensamiento científico. Por tanto, parece apropiado prestar alguna atención a sucesos similares del pasado y a la manera como fueron tratados.

El primer caso a mencionar es el de Zenón de Elea. Sus paradojas conciernen a la estructura del continuo y al concepto de movimiento. Lo más adecuado es considerarlos como argumentos *ad hominem,* dirigidos contra los partidarios de una concepción atomista del espacio y el tiempo. El método de prueba de Zenón, es de interés porque, en algunos casos, se anticipó al principio de la diagonal de Cantor. Al derivar la para-

doja de Aquiles, por ejemplo, introduce, partiendo de la tesis de su oponente, una expresión analítica para los puntos que son sucesivamente alcanzados por Aquiles; luego, en virtud de esta expresión, construye un nuevo punto para el cual esa expresión no es válida, y que es, a pesar de todo, alcanzado por Aquiles.

La concepción atomista apareció tan pronto como Eudoxo desarrolló su teoría de las proporciones, que eliminaba las dificultades surgidas del descubrimiento de las razones inconmensurables. El atomismo matemático, sin embargo, fue capaz de mantenerse al margen de las ciencias e incluso ocasionalmente de presentar una solución temporal, como en el caso de la filosofía de Mutakalemo y de Giordano Bruno.

La escuela de Megara, fundada por Euclides de Megara, atacó a la escuela de Atenas objetando a las doctrinas de Platón y Aristóteles un cierto número de paradojas. Estas paradojas eran, en cierto modo, elaboraciones de argumentos de Zenón, pero incorporaban también ideas nuevas. Para nuestro propósito, la paradoja del mentiroso es la más interesante de la colección; intentaba mostrar la inadecuación del concepto absoluto de verdad, introducido por Platón y Aristóteles. Los lógicos de la escuela de Atenas y, posteriormente, los de la Stoa se mostraron incapaces de tratar de una forma adecuada la paradoja del mentiroso. El poeta y gramático Filitas de Cos se dice haber muerto prematuramente de agotamiento, debido a su desesperado esfuerzo por resolver esta paradoja. Chrysipo de Soloi, el máximo lógico de la Stoa, hizo una observación muy notable al decir que la gente que formula la paradoja del mentiroso "se desvía totalmente de los significados de las palabras; únicamente producen sonidos, sin expresar nada", pero este punto de vista, que, curiosamente, está cerca de concepciones contemporáneas, no fue aceptado por sus seguidores.

Los escolásticos no podían acercar más el problema a su solución. Ha sido Tarski quien, finalmente, ha desatado el nudo.

No será necesario dedicar muchas palabras a las antinomias presentadas por Kant en su *Crítica de la Razón Pura*; estas antinomias están únicamente originadas más bien por abuso del lenguaje. Lo mismo se puede decir del método dialéctico establecido por Hegel, que estuvo fuertemente inspirado en las antinomias de Kant.

Las paradojas del infinito establecidas por Bolzano fueron, sin embargo, genuinas. Fueron resueltas en parte por el mismo Bolzano, en parte por Cantor.

Como regla general podemos establecer que las paradojas —las genuinas, cuando menos— surgen siempre que el aparato conceptual de la ciencia, en mayor o menor grado, se revisa. Se presentan bien por el hecho de que el nuevo aparato conceptual no está, todavía, completamente constituido de una forma satisfactoria, o bien por el uso de una terminología tomada del anterior estadio de la ciencia y todavía no suficientemente adaptada al nuevo aparato conceptual.

En consecuencia, las paradojas deberán eliminarse o por una reconstrucción del nuevo aparato conceptual, o por una revisión de la terminología científica. En los intentos para eliminar las paradojas de la lógica y de la matemática podemos reconocer fácilmente la influencia de ambos puntos de vista.

[B. PRINCIPALES INTENTOS DE SOLUCIÓN DE LAS PARADOJAS CLÁSICAS]

14. La interpretación intuicionista de las paradojas

Según Brouwer, parte de la matemática clásica ha perdido el contacto esencial e indispensable con la realidad viva del pensamiento intuitivo matemático, que tiene un carácter puramente constructivo; no siendo, pues, de naturaleza discursiva, el pensamiento matemático es independiente de la lógica formal. Por su alejamiento del pensamiento intuitivo, la matemática clásica, en general, no tiene objeto alguno que se pueda construir dentro del dominio de la intuición originaria de la matemática. Una vuelta al punto natural de partida del pensamiento matemático y una adecuada adaptación del lenguaje matemático respecto del pensamiento matemático será suficiente para deshacerse de las paradojas; esta esperanza ha sido totalmente corroborada por el desarrollo de la matemática intuicionista.

Sin embargo, tal como veremos, hay procedimientos totalmente diferentes que también nos permiten deshacernos de las paradojas y que no nos imponen los sacrificios que implica la adopción del punto de vista

intuicionista; así se explica la repulsa de la abrumadora mayoría de los matemáticos para abrazar el método intuicionista y su complacencia en contentarse con una más conservadora restauración del edificio matemático, tal como la efectuada por los seguidores del formalismo, logicismo y cantorismo. Sin embargo, debe destacarse que la eliminación de las paradojas no es en modo alguno el único, ni el principal objetivo de la reconstrucción intuicionista de la matemática; por tanto, la posibilidad de librarse de las paradojas sin abrazar el método intuicionista no proporciona un argumento válido contra el intuicionismo.

15. El punto de vista cantorista

Ya hemos explicado los rasgos típicos de varias axiomatizaciones desarrolladas para la teoría clásica de conjuntos. El programa de esas axiomatizaciones, así como su realización por Zermelo, Fraenkel, Skolem y otros, ha estado fuertemente influenciada —por no decir determinada— por el descubrimiento de las paradojas; por tanto, valdrá la pena considerar los diferentes sistemas axiomáticos para teoría de conjuntos desde un punto de vista que parte del análisis de estas paradojas.

Las paradojas de la teoría de conjuntos —es decir, las paradojas de Cantor, de Burali-Forti, y de Zermelo-König— al parecer están originadas por la liberalidad con que el axioma de comprehensión permite la introducción de nuevos conjuntos. Así, consideraremos el problema de si es posible someter la introducción de nuevos conjuntos a condiciones restrictivas que se adapten al siguiente criterio: las condiciones deberían impedir la introducción de los conjuntos que dieran lugar a las paradojas. Por otra parte, no deberían per-

judicar los métodos de construcción que se establecieron en el pasado siendo útiles y seguros.

La axiomatización de Zermelo [6] constituye una primera tentativa de solución de este problema. En este sistema axiomático el axioma de comprehensión está sustituido por una serie de axiomas, cuya capacidad de producción de teoremas está relativamente limitada. Sin embargo, admitiendo simultáneamente todos los axiomas, se pueden derivar los teoremas característicos de la teoría clásica de conjuntos. Ahora debemos analizar la cuestión de si en realidad esta axiomatización se deshace de las paradojas de la teoría de conjuntos. Una respuesta final a esta cuestión sólo se puede dar

[6] Los axiomas que componen el sistema de Zermelo son los siguientes:

(Z1) *Axioma de Extensión o Determinación:* "Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos"; $(\forall A)\ (\forall B)\ (\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B$. (Z2) *Axioma de Conjuntos Elementales:* "(a) Existe el conjunto vacio $\emptyset$; (b) si x es un elemento, existe entonces el conjunto $\{x\}$ que contiene a x como único elemento"; (c) para dos elementos cualesquiera x e y existe un conjunto A que contiene sólo a x e y. (Z3) *Axioma de Separación o Especificación:* "Para todo conjunto A y para toda condición $\varphi(x)$ existe un conjunto B cuyos elementos son aquellos elementos x de A para los que se cumple $\varphi(x)$"; $(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x)\ (x \in B \Leftrightarrow (x \in A\ \&\ \varphi(x)))$. (Z4) *Axioma del Conjunto Potencia:* "Para todo conjunto A existe un conjunto B que tiene como elementos todos los subconjuntos de A"; $(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall C)\ (C \in B \Leftrightarrow C \subseteq A)$. (Z5) *Axioma del Conjunto Suma:* Para todo conjunto A existe un conjunto B cuyos miembros son todos los miembros de los miembros de A"; $(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x)\ (x \in B \Leftrightarrow (\exists C)\ (x \in C\ \&\ C \in A)$. (Z6) *Axioma de Elección:* "Para todo conjunto A cuyos miembros son disjuntos dos a dos y por igual distintos del conjunto vacío, existe al menos un subconjunto de su conjunto unión que contiene un miembro, y sólo uno, de cada uno de los miembros de A"; $(\forall A)\ [(\forall B)\ [B \in A \rightarrow (\exists x)\ (x \in B\ \&\ (\forall C)\ (C \in A\ \&\ C \neq B \rightarrow\ \&\ (\exists z)\ (z \in B\ \&\ z \in C))] \rightarrow (\exists D)\ (\forall B)\ (B \in A \rightarrow (\exists w)\ (\forall v)\ [v = w \Leftrightarrow (v \in D\ \&\ v \in B)])]$. (Z7) *Axioma de Infinito:* "Existe al menos un conjunto A que cumple las condiciones siguientes: $\emptyset \in A$, $x \in A \rightarrow \{x\} \in A$"; $(\exists A)\ (\emptyset \in A\ \&\ (\forall x)\ (x \in A \rightarrow \{x\} \in A$. [T.]

basándonos en una prueba de consistencia; hasta ahora, sin embargo, no se ha hecho una prueba tal y, por el teorema de Gödel, apenas parece probable —diciéndolo con eufemismo— que pueda darse esa prueba. Por tanto, tendremos que contentarnos con una respuesta de naturaleza mucho más simple: poner de manifiesto que son eliminados los argumentos que en la versión original de Cantor de la teoría de conjuntos daban lugar a paradojas, gracias a las restricciones implícitas en las axiomatizaciones que han hecho Zermelo y otros. Nos limitaremos a discutir el sistema de axiomas de Zermelo.

Consideremos, por ejemplo, la paradoja de Cantor. Esta paradoja surge de la posibilidad, implícita por el axioma de comprehensión de Cantor, de construir el conjunto m de todos los conjuntos. ¿Podemos construir este conjunto a partir de los axiomas de Zermelo? Parece que tal construcción no es posible.

El axioma (Z1) ni siquiera puede entrar en consideración. El axioma (Z2) sólo permite la construcción de conjuntos de número cardinal 0, 1 y 2; el conjunto m, si puede construirse, debe esperarse que tenga un número cardinal considerablemente mayor que éstos.

El axioma (Z3) sólo permite la construcción de ciertos subconjuntos de un determinado conjunto N, dado de antemano; está claro que de esta manera nunca se obtendrá el conjunto m.

Los axiomas (Z4), (Z5), y (Z6) sólo permiten, de igual modo la construcción de conjuntos de comprensión limitada.

Sólo resta la posibilidad de obtener conjuntos muy extensos aplicando el axioma (Z7) en combinación con los axiomas (Z2-6). Este método de construcción nos proporciona los conjuntos Z_0, $\mathfrak{G}(Z_0)$, $\mathfrak{P}(Z_0)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(Z_0))$, ..., así como algunos de sus respectivos subconjuntos.

Además, dado cualquier conjunto S que se pueda construir de esta manera, podemos construir a la vez otro conjunto $S' = \mathfrak{P}(S)$ tal que $NC(S') > NC(S)$, y de este modo es evidente que, si bien de esta manera podemos construir conjuntos muy extensos, por este método nunca obtendremos el conjunto m de todos los conjuntos.

Este argumento conserva su validez si reforzamos el sistema de Zermelo añadiéndole los recursos introducidos por Fraenkel y von Neumann con miras a permitir la construcción del conjunto:

$$Z_1 = \{ Z_0, \mathfrak{P}(Z_0), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(Z_0)), \ldots \},$$

que la axiomatización de Zermelo no provee.

Por tanto, parece bastante claro que ni los axiomas de Zermelo, ni los sistemas axiomáticos de Skolem, Fraenkel, von Neumann, Bernays, Gödel, nos permiten construir el conjunto m de todos los conjuntos. Consecuentemente, podemos estar bastante seguros de que nos hemos librado de la paradoja de Cantor. Es válido un argumento similar para la paradoja de Burali-Forti.

16. La teoría de tipos lógicos

Aunque el intuicionismo y la teoría axiomática de conjuntos han tratado con buen éxito los problemas creados por el descubrimiento de las paradojas, debe apuntarse que estos problemas transcienden el alcance relativamente corto de esas doctrinas. En principio, las paradojas amenazan los fundamentos de la lógica y, por ello, parece razonable considerarlas ante todo desde un punto de vista lógico. Fue Russell el primero que intentó tratar las paradojas con métodos puramente lógicos. En sus *Principles of Mathematics* (1903), que contiene la primera explicación de la paradoja que lleva su nombre, ya puso a prueba varios artificios

para intentar eliminar las paradojas, a saber: (1) una versión primitiva de la teoría de tipos; (2) la teoría del zigzag; (3) la teoría de no-clases. Brevemente consideró más tarde: (4) la teoría de limitación de tamaño. Pronto se vio que la teoría de no-clases no se diferencia en esencia de la teoría de tipos.

Puede decirse que la *teoría de limitación de tamaño* está implícita en la axiomatización de Zermelo de la teoría de conjuntos y en los sistemas FS [7] y NF [8] que son resultado de su desarrollo posterior.

La *teoría del zigzag* (como observa Wang) fue llevada a efecto mucho más tarde por Quine, cuyos sistemas NF (1938) y ML [9] (1940, versión corregida en 1951) están en una relación similar a la de los sistemas FB [10] y NB. [11]

Pero Russell decidió desarrollar la teoría de la lógica de tipos que obtuvo una forma definitiva entre 1906 y 1908 y se convirtió en una de las piedras angulares de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead (1910-13).

En opinión de Russell —al igual que Poincaré— las paradojas surgían de un círculo vicioso. Consecuentemente, aseguró su eliminación aplicando rigurosamente el llamado *principio del círculo vicioso,* que se estableció como sigue "lo que presupone *el todo* de una colección no debe formar parte de la colección"; o, conversamente: "Si, supuesto que una cierta colección tuviera un total, hubiera de tener miembros definibles solamente en términos de ese total, entonces la referida colección no tiene total". Otro enunciado,

[7] Sistema de Fraenkel-Skolem. [T.]
[8] New Foundations for Mathematical Logic, Quine (1937). [T.]
[9] Mathematical Logic. [T.]
[10] Fraenkel-Bernays. [T.]
[11] von Neumann-Bernays, actualmente NBG (: von Neumann-Bernays-Gödel). [T.]

más formal, del principio es como sigue: "Cualquier entidad definida mediante una expresión que contenga una variable ligada debe ser excluida de los valores de esa variable".

No vamos a tratar con detalle el sistema formal contenido en los *Principia Mathematica* y las diversas simplificaciones que fueron introducidas sucesivamente por N. Wiener (1914), F. P. Ramsey (1926), y otros. Haciendo una distinción entre individuos, conjuntos, familias de conjuntos y así sucesivamente —representados respectivamente por las variables x_0, y_0, z_0, ..., x_1, y_1, ..., x_2, ..., realiza Russell el programa implícito en el principio del círculo vicioso hasta el grado de desustancializar las clases y someterlas a una estricta jerarquía. De ello se sigue la eliminación de la paradoja de Russell, ya que tiene su origen en la admisión de fórmulas tales como $x_0(x_0)$.

Sin embargo, la aceptación general de la teoría de tipos se ha visto embarazada por varios obstáculos de diferente naturaleza:

(1) El primer obstáculo es de naturaleza algo emocional. Muchos lógicos y matemáticos piensan que las restricciones implicadas por la teoría de tipos son únicamente ingeniosos planes inventados con el único objeto de que se eliminen las paradojas, desprovistos de cualquier justificación ulterior y que ofrecen una solución de los problemas creados por el descubrimiento de las paradojas que de ningún modo es satisfactoria.

Personalmente, no participo de esas reacciones emocionales; por el contrario, en mi opinión, la jerarquización de las variables (y constantes) de Russell es completamente natural y pienso que podría haber sido introducida igualmente sin hacer referencia a las paradojas de la lógica y de la teoría de conjuntos.

No puedo resultar sospechoso de atribuir excesivo peso a la autoridad de Aristóteles, pero me parece significativo que la distinción del Estagirita (en sus *Categorias* 5, 2 a 11) entre objetos individuales como sustancias primeras y especies como sustancias segundas puede interpretarse como constitutiva de la primera forma (rudimentaria) de la teoría de tipos. La anticipación de Schröeder de la teoría de tipos, recientemente recordada por Church, es también interesante desde este punto de vista. Llegamos a la misma conclusión considerando la aplicación de la lógica simbólica a la formalización de las teorías matemáticas. Como regla, podemos decir que no se aplica siempre la jerarquía completa de tipos lógicos; en la mayoría de los casos sólo se aplica un pequeño número de tipos lógicos.

Abordemos este punto. En el caso de la Aritmética, la lógica elemental es suficiente, si aceptamos las definiciones pertinentes por recursión como axiomas independientes; pero aplicando un sistema adecuado de lógica de orden superior, podríamos justificar la introducción de esas definiciones por el método de Dedekind. En el caso de la geometría elemental, la mayor parte de los axiomas más interesantes están cubiertos por la formalización de Tarski mediante la lógica elemental. En el caso de la teoría de grupos, donde los subgrupos juegan un papel importante como elementos del grupo, es natural aplicar la lógica de segundo orden. Lo mismo sucede si en los sistemas algebraicos introducimos los conceptos y métodos de la teoría de ideales.

Sólo en esos casos simples, donde los ideales se pueden caracterizar dentro de la lógica elemental —principalmente, ideal de anillo, por ejemplo— puede evitarse una introducción de la lógica de segundo orden; en tales casos, sin embargo, carece de utilidad una introducción de los métodos de la teoría de ideal.

En otros casos, podemos volver a la lógica elemental pasando por alto los elementos originales de los sistemas algebraicos bajo consideración y considerando sólo ideales y operaciones aritméticas con ideales. El paso inverso a una tal algebraización correspondería a la introducción del punto de vista de la teoría de la representación para sistemas algebraicos. Así resulta que la introducción de una jerarquía de tipos lógicos está en total acuerdo con la tendencia prevalente de la investigación matemática contemporánea.

Hasta aquí lo que concierne a las reacciones psicológicas ante la introducción de la teoría de tipos.

(2) Otro obstáculo reside en la aparente incompatibilidad de esta teoría respecto al programa integral del logicismo tal como ha sido desarrollado por Frege, Russell, Couturat, y otros. Si deseamos restaurar la deducción de Frege de la aritmética a partir de la lógica, necesitamos, además de los principios de naturaleza puramente lógica, los llamados *axiomas de reducibilidad* [12] y un *axioma de infinito.* [13] *Difícilmente* puede haber alguna diferencia de opinión sobre el carácter extralógico del axioma de infinito. Concentraremos, pues, nuestra atención sobre los axiomas de reducibilidad, que constituyen una versión del axioma de comprehensión, adaptados a la teoría de tipos.

Estos axiomas constituyen, en cierto modo, una debilitación del principio del círculo vicioso que, si lo observamos demasiado estrictamente, corre el peligro de mutilar, más que purificar, las matemáticas. Lo veremos claramente al discutir las siguientes definiciones:

[12] Para toda función proposicional existe alguna función predicativa satisfecha únicamente por los mismos argumentos. [T.]

[13] Ver nota 6. [T.]

(I) *Elemento unidad* de un grupo es el elemento x tal que, para todo elemento y, tenemos: (1) $x \cdot y = y \cdot x = y$; (2) existe un elemento z, tal que $y \cdot z = z \cdot x = x$; en símbolos:

$$(y)[x \cdot y = y \,\&\, y \cdot x = y \,\&\, (Ez)\{y \cdot z = x \,\&\, z \cdot y = x\}\,].$$

(II) *Menor límite superior* de un conjunto X de números reales es el número real x tal que, para todo número real y, existe en X un número real z que es mayor que y, si y sólo si y es menor que x; en símbolos:

$$(y)[(Ez)\,\{X(z) \,\&\, z > y\} \iff y < x].$$

(III) El conjunto X de todos los números reales es la intersección de todas las clases Y tales que: (1) Y contiene a 1; (2) si Y contiene a y, entonces Y contiene también a $y + 1$; en símbolos:

$$(x)\,\{X(x) \iff (Y)[\,\{Y(1) \,\&\, (y)[Y(y) \to Y(y+1)]\} \to Y(x)]\}.$$

(IV) La clase de Russell x es la clase de todas las clases y, que no son miembros de sí mismas; en símbolos:

$$(y)[x(y) \iff \overline{y(y)}].$$

Todas estas definiciones son del género no-predicativo que Poincaré rechazó; definen un cierto miembro de una totalidad mediante una expresión que contiene una variable ligada que toma como valores todos los miembros de esa totalidad.

Debe admitirse que pueda haber alguna duda acerca del uso de las definiciones de este género; aparte del hecho de que alguna de ellas conduzca a una paradoja. Ciertamente esas definiciones deben ser re-

chazadas si se acepta una posición radicalmente constructivista, según la cual:

(A) Toda definición contiene la descripción de una cierta construcción;

(B) Toda construcción matemática involucra la creación de alguna nueva entidad que no puede suponerse que exista independientemente de esta construcción.

Por otra parte, si se acepta la concepción usual según la cual una construcción matemática es más bien una especificación de una cierta entidad dentro de una totalidad de entidades dadas de antemano, no parece ser suficiente razón para rechazar indiscriminadamente toda definición no-predicativa; desde este punto de vista, deberíamos considerar más bien la cuestión de qué definiciones no-predicativas pueden admitirse y cuales no.

A causa de la paradoja de Russell, rechazaríamos ciertamente la definición (IV). Pero esa paradoja ya queda eliminada por nuestra elección de las fórmulas atómicas, y, por tanto, no puede jugar papel alguno en nuestra presente discusión. Por otra parte, la definición (I) es claramente inocua, ya que nunca se usa para establecer la existencia de un elemento unidad.

La situación es diferente para la definición (III); en efecto, en la teoría de Dedekind —y también en la construcción logicista de la aritmética— el conjunto X de todos los números naturales se obtiene esencialmente como la intersección de todos los conjuntos Y; por tanto, necesitamos alguna base para construir esa intersección, y, por ello, debe aceptarse alguna versión del axioma de reducibilidad.

En un tratamiento axiomático de la teoría de los números reales, la existencia de un menor límite superior está garantizada por un axioma adecuado; en este caso, el status de la definición (II) es similar al de la

definición (I). Sin embargo, en la construcción logicista de la teoría de números reales, la definición (II), juega un papel que es totalmente similar al de la definición (III). Ello implica claramente otra aplicación de algún axioma de reducibilidad.

17. Paradojas lógicas y semánticas

En nuestra anterior exposición, los axiomas de reducibilidad se presentan como axiomas para la existencia de conjuntos, familias, clases, etc. En la presentación original de Russell, sin embargo, eran considerados bajo un aspecto diferente.

En primer lugar, la distinción entre entidades del tipo 0, 1, 2,... no se consideraba suficiente. Dentro de cada tipo se hacía una distinción ulterior, que, *grosso modo,* se puede describir así: si, en la definición de una entidad del tipo k, aparece una variable ligada del tipo j, pero ninguna del tipo $> j$, entonces esa entidad es del orden $j + 1$; las entidades del tipo 0 se denominarán *predicativas,* todas las restantes entidades se considerarán *no-predicativas* (o impredicativas).

Esta medida tendía a eliminar paradojas como la de Richard, y no es difícil entender cómo lo hacía. Todo conjunto A de números reales debe tener un cierto orden j. Ahora bien, los números $D(A)$ que corresponden a los conjuntos A de orden j formarán un conjunto A' de orden $j + 1$, los números $D(A')$ que corresponden a los conjuntos A' de orden $j + 1$ formarán un conjunto A'' de orden $j + 2$, etc. Ya no podemos introducir, pues, el conjunto T, ya que no puede asociarse a este conjunto ningún orden determinado. En relación con ello es importante destacar que, entonces, los axiomas de extensionalidad sólo valen si las entidades v_{k+1} y w_{k+1} coinciden a la vez en tipo y

orden. De acuerdo con esto, conjuntos A y A' como los anteriores, que contienen los mismos números reales, son sin embargo considerados como distintos.

No obstante, si mantenemos tan estrictamente esta "*ramificación*" de cada tipo, ponemos trabas a nuestro intento de realizar el programa del logicismo. Por ello se requiere un segundo paso: Russell originalmente estableció los axiomas de reducibilidad para asegurar, para cada entidad del tipo k y orden $j > 0$, la existencia de una entidad equivalente del tipo k y orden 0.

La situación cobró un nuevo aspecto en 1926, cuando Ramsey, considerando una nota de Peano —*Exemplo de Richard non pertine ad Mathematica, sed ad linguistica*— dividió las paradojas de la lógica y de las matemáticas en dos amplias clases. Permítaseme citar las propias palabras de Ramsey:

> El grupo A consta de contradicciones, que, aparecen en los mismos sistemas lógico o matemáticos y para las que no se había hecho previsión alguna. Contiene sólo términos lógicos o matemáticos tales como clase o número, y muestran que debe haber algo incorrecto en nuestra lógica o matemática. Pero las contradicciones del grupo B no son puramente lógicas, y no pueden establecerse con sólo términos lógicos, pues hacen referencia al pensamiento, lenguaje, o simbolismo, que no son términos formales sino empíricos. Así, pueden deberse no a una lógica o matemática defectuosa, sino a ideas defectuosas del pensamiento y el lenguaje. Así, no serían paradojas relevantes para las matemáticas o la lógica, si por "lógica" entendemos un sistema simbólico, aunque, por supuesto, serían relevantes para la lógica en el sentido del análisis del pensamiento.

(Aunque en el presente contexto no importa demasiado, debe observarse que la descripción de Ramsey de las paradojas del grupo B ya no puede ser aceptada. El análisis de estas paradojas que, a partir de

las ideas de T. Kotarbiński, S. Leśniewski, y J. Łukasiewicz, ha realizado Tarski y que ha encontrado su expresión clásica en el método semántico desarrollado por ese autor, nos lleva a concepciones muy diferentes. En particular, a pesar de las opiniones contrarias expresadas por varios autores, estoy convencido de que Tarski ha conseguido mostrar definitivamente que ninguna noción empírica está involucrada en las paradojas del grupo B de Ramsey.)

En cuanto a las paradojas del grupo A, que ahora se denominan "paradojas lógicas", podemos estar completamente de acuerdo con Ramsey. Parece evidente que la eliminación de estas paradojas sólo puede realizarse basándose en una revisión adecuada de los principios básicos de la lógica y de las matemáticas, tal como la efectuada, por ejemplo, por Russell en su teoría de tipos lógicos, o por Zermelo en su axiomatización de la teoría de conjuntos. Si formalizamos la lógica y las matemáticas, las paradojas lógicas —especialmente, las paradojas de Russell, Cantor, y Burali-Forti— adoptan una forma simbólica, y de ahí que una revisión de la formalización de la lógica sea la manera adecuada de tratarlas.

Respecto a las paradojas del grupo B —que también fueron denominadas por Ramsey "paradojas epistemológicas", y que ahora son conocidas como "paradojas semánticas"; aquí se incluyen la paradoja del mentiroso así como las paradojas de Grelling, Berry, Richard, y Zermelo-König— podemos apoyar la parte negativa de la conclusión de Ramsey. Si formalizamos la lógica y las matemáticas, las paradojas semánticas no entran en el sistema formal, permanecen fuera; por tanto, carece de interés para desembarazarse de ellas una revisión del sistema formal.

Se sigue, como correctamente observó Ramsey, que los elementos de la teoría russeliana de tipos lógicos

que estaban destinados a eliminar las paradojas semánticas no tienen utilidad; por tanto, se puede prescindir de esos elementos sin detrimento de la consistencia de la lógica y las matemáticas. Un elemento redundante de esa índole es en particular la ramificación de los tipos lógicos.

Además, está claro que las paradojas del grupo B se originan, esencialmente, por tratar de una manera inadecuada las nociones semánticas tales como "*significado*", "*verdad*", y "*definición*" que juegan un papel importante en las discusiones metalógicas. Se sigue de ello que una revisión (o incluso una formalizacón) del aparato terminológico de la lógica y de las matemáticas no es suficiente para eliminar todas las paradojas; debe completarse con una revisión de la terminología metalógica y, especialmente, la terminología semántica.

Así, era correcta la opinión de Ramsey de que la eliminación de las paradojas del grupo A y del grupo B constituyen problemas diferentes. De acuerdo con esto, trataremos primero los intentos que, partiendo de la teoría de Russell de tipos lógicos, tienden a eliminar las paradojas del grupo A de una manera menos costosa, y luego trataremos el análisis de las paradojas del grupo B.

La aceptación de la teoría de tipos amenaza seriamente el programa integral del logicismo tal como lo desarrollaron Frege y Russell en sus primeras publicaciones. Apenas es necesario decir que los seguidores del logicismo en modo alguno se han conformado con este frustrante estado de cosas. Sus intentos para escapar de las consecuencias de una aceptación incondicional de la teoría de tipos de Russell constituye un capítulo muy atractivo de la historia de la lógica contemporánea, algunos de cuyos hechos típicos se expondrán en las secciones siguientes.

El principal problema es, por supuesto, cómo atenuar las restricciones inherentes a la teoría de tipos a fin de restaurar la posibilidad de construir la teoría de números naturales independientemente de cualquier apelación a supuestos extralógicos y prevenir, por otra parte, la aparición de nuevas paradojas. Al mismo tiempo, se hacen intentos para incorporar al sistema lógico lo que de mayor valor hay en la teoría de conjuntos, para abrir el camino a una derivación, sobre una base puramente lógica, no sólo de los fundamentos de la aritmética, sino también de los fundamentos del análisis clásico. La realización de este ambicioso programa significaría la construcción de una "*magna lógica*", de un sistema lógico que abarcase la totalidad de la matemática pura.

[C. NUEVOS DESARROLLOS]

18. Observaciones de Behmann

Otro paso hacia una liberalización de la jerarquización de la lógica de tipos se hizo en 1931, cuando H. Behmann observó juiciosamente que todas las definiciones que dan lugar a las paradojas presentan un hecho peculiar: no satisfacen la conocida condición establecida por Pascal en su brillante ensayo *De l'esprit geométrique et de l'art de persuader* (presumiblemente escrito hacia 1658 para servir como prefacio a la *Logique de Port-Royal*), sobre el hecho de que las definiciones nos permiten reemplazar el término definido por su definiens. Realmente, consideramos la definición establecida en la sección que hemos dedicado a la paradoja de Russell:

$$r(x) \Longleftrightarrow \overline{x(x)};$$

si intentamos reemplazar, en $r(r)$, el término definido r por su definiens, obtendremos $\overline{r(r)}$. Así, en lugar de capacitarnos para eliminar el término definido, la definición nos fuerza a introducirlo de nuevo.

Las razones de la especial importancia de las observaciones de Behmann no son difíciles de captar. Pues supóngase que damos un argumento que conduce

a una paradoja en la que aparece un término t que se ha introducido mediante una definición que satisface la condición de Pascal; entonces, reemplazando consistentemente el término t por su definiens obtendremos un nuevo argumento en el que el término t ya no aparece y que, a pesar de todo, conduce a una paradoja. Nunca puede echarse la culpa de la aparición de una paradoja a la introducción de un nuevo término t mediante una definición que satisfaga la condición de Pascal. Por otra parte, si una definición no satisface la condición de Pascal, no existe, en general, razón alguna por la que su introducción no conduzca a paradojas.

Por tanto, deberíamos considerar seriamente la cuestión de si las paradojas lógicas no resultan exclusivamente de tolerar indebidamente definiciones que no satisfacen la condición de Pascal. Si ello es así, el sistema lógico de Frege, por ejemplo, seguiría siendo consistente si sólo se admitiesen las definiciones que satisficieran la condición de Pascal.

Por supuesto, no es cierto en modo alguno que la derivación de la aritmética en este sistema siga siendo posible si la exclusión de esas definiciones se mantiene estrictamente; pero podríamos procurar reemplazar la condición de Pascal por una menos restrictiva que excluyese aquellas definiciones que conducen a paradojas, sin que impida una reconstrucción de la derivación de Frege.

En conexión con ello, todavía se podría mencionar otra observación hecha por Behmann. Si una definición no satisface la condición de Pascal, no es necesario excluir su introducción; basta excluir el uso del término definido en los contextos de los que no se puede eliminar.

19. Resultado de Bochvar

En 1944, el lógico ruso D. A. Bochvar probó un resultado que combina la idea de Behmann con la noción, desarrollada en la sección 16, según la cual las definiciones en cuestión se basan en axiomas de existencia.

El sistema formal A que él considera es una versión de la lógica elemental en las que hay variables x_1, x_2, x_3, ..., no sujetas a una jerarquía de tijos, y átomos x_n ($x_{n'}$, $x_{n''}$, ..., $x_{n(p)}$).

Para derivar la paradoja de Russell dentro del sistema A, introducimos la definición:

$$(1) \qquad r(x_1) \Longleftrightarrow \overline{x_1(x_1)};$$

No será necesario repetir la derivación de la paradoja; sin embargo, de la definición (1), también podemos derivar:

$$(2) \qquad (x_1)[r(x_1) \Longleftrightarrow \overline{x_1(x_1)}],$$

y por tanto:

$$(3) \qquad (Ex_2)(x_1)[x_2(x_1) \Longleftrightarrow \overline{x_1(x_1)}].$$

No obstante, esta fórmula puede considerarse como una aplicación del esquema de axioma:

$$(4) \qquad (Ex_{p+1})(x_1)(x_2)\ldots(x_p)[x_{p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \Longleftrightarrow U(x_1, x_2, \ldots, x_p)]$$

donde U es cualquier expresión que contenga las variables x_1, x_2, $\ldots x_p$.

Así, la aceptación tácita del esquema de axioma (4) parece ser la responsable del surgimiento de la

paradoja de Russell y de las paradojas relacionadas con ella en el sistema A.

Consideramos ahora el sistema lógico B obtenido del sistema A excluyendo toda aplicación del esquema de axioma (4); *Bochvar ha demostrado que el sistema B es consistente.* Este resultado constituye claramente una justificación completa de las ideas expresadas en secciones precedentes, y en particular del punto de vista de Behmann.

Si en el sistema B, intentamos reconstruir los argumentos que en el sistema A conducen a la paradoja de Russell y a paradojas relacionadas con ella, sólo obtenemos una de las dos conclusiones contradictorias, por ejemplo:

$$\overline{(Ex_2)(x_1)[x_2(x_1) \Longleftrightarrow \overline{x_1(x_1)}]},$$

por tanto:

$$(x_2)(Ex_1)[x_2(x_1) \Longleftrightarrow x_1(x_1)].$$

20. El axioma de reducibilidad

El resultado de Bochvar parece arrojar una luz inesperada acerca del sentido de varios intentos para eliminar las paradojas lógicas.

La exclusión del esquema de axioma (4) de la sección 19 implica una debilitación muy seria de la lógica, que es inconsistente con el programa total del logicismo. Podemos considerar las diferentes revisiones del sistema de Frege como intentos para restaurar parcialmente los daños causados por una exclusión completa del esquema de axioma (4).

Consideremos, por ejemplo, el sistema de lógica de orden superior descrito en la sección 79 de *Foundations of mathematics.* Este sistema se basa en la introducción de una jerarquía entre las variables que con-

cluye, finalmente, eliminando ciertos átomos admitidos en el sistema lógico A. Gracias a esta medida, sin embargo, no se puede, en lo sucesivo, aplicar el esquema de axioma (4), sin restricción alguna, a expresiones U(.....) formadas con los átomos retenidos. En esta forma debilitada, el esquema de axioma (4) se reduce al esquema para los axiomas de reducibilidad.

Los dos anteriores sistemas, el de la lógica de orden superior y el sistema de *Principia Mathematica,* que se basaba en una jerarquía ramificada de tipos, están a medio camino entre una aceptación sin restricciones del esquema de axioma (4), que conduce inevitablemente a las paradojas lógicas, y un completo rechazo de este esquema de axioma, que es incompatible con el programa total del logicismo.

Se considera ampliamente que ambos sistemas son razonablemente seguros. Sin embargo, a menudo se piensa que son indebidamente restrictivos y, ciertamente, es completamente natural que muchos lógicos busquen un programa más liberal que permita, estableciendo la matemática pura como rama de la lógica, seguir el ejemplo de Frege.

21. Las investigaciones de Quine

En particular, el lógico americano W. V. Quine ha dedicado gran parte de su obra a este problema. Una de sus primeras contribuciones fue su trabajo *New Foundations for Mathematical Logic* (1937) en el que construyó un sistema formal para el que ahora se emplean normalmente las siglas NF. Su *Mathematical Logic* (1940) fue el resultado de ulteriores esfuerzos. Quine había adoptado elaboradas precauciones contra la aparición de las paradojas de Russell y de Cantor. Sin embargo, J. B. Rosser probó, en 1941, que el

sistema formal contenido en *Mathematical Logic* permitía la derivación de la paradoja de Burali-Forti; el mismo resultado lo obtuvo independientemente R. C. Lyndon.

Quine reconoció, después de esto, que había confiado demasiado fuertemente en la analogía entre las paradojas de Cantor y de Burali-Forti. En el sistema de *Mathematical Logic* se rompe esta analogía; por tanto la posibilidad de derivar la paradoja de Burali-Forti a pesar de las precauciones tomadas contra las paradojas de Russell y de Cantor, que pueden, por supuesto, derivarse fácilmente una vez obtenida la paradoja de Burali-Forti. Consiguió pronto reconstruir su sistema de manera que fuera también excluida la paradoja de Burali-Forti. Posteriormente, su discípulo Hao Wang (1948, 1951) dio para el sistema de *Mathematical Logic* una versión consistente ML que difiere muy ligeramente de la versión, inconsistente, original.

Siguiendo a Wang y a McNaughton (1953), deseo describir los sistemas NF y ML de tal manera que se vea claramente su analogía a los sistemas FS y NB. [14]

En primer lugar, se podrían dedicar unas pocas palabras al procedimiento de *estratificación* que substituye, en Quine, a la jerarquía de tipos lógicos de Russell. Consideramos una versión de la lógica elemental en la que se admiten variables x_1, x_2, ... x_p, ... y átomos x_p (x_q) (donde $p, q = 1, 2, 3,\ldots$). Entonces se dice que una fórmula U es estratificada si podemos asignar números a las variables —libres o ligadas— que contiene, de manera tal que, para todo átomo $x_p(x_q)$ contenido en U, las variables x_p y x_q reciban números consecutivos $n+1$ y n.

Así:

$$(x_2)[x_2(x_1) \Longleftrightarrow (x_2)\{\overline{x_1(x_3)} \rightarrow x_2(x_1)\}]$$

[14] Cfr. G. W. Beth, *Foundations of Mathematics,* sección 122.

es un ejemplo de fórmula estratificada, pues podemos asignar a las variables x_1, x_2, y x_3 los números 2, 3 y 1, respectivamente; la fórmula

$$x_1\ (x_1),$$

que conduce a la paradoja de Russell, no está estratificada.

En el sistema NF, admitimos estos casos:

$$(Ey)(x)[y(x] \Longleftrightarrow F(x)]$$

del esquema de axioma (4) de la sección 19 en la que F(x) está estratificada y no contiene la variable y.

En el sistema ML, tenemos variables de clases X_1, X_2, X_3, ..., y variables de conjuntos x_1, x_2, x_3, ...; las variables de conjuntos tienen como rango las clases X, para las que:

$$(EY)Y(X).$$

Para la existencia de conjuntos tenemos en ML los mismos casos del esquema de axioma (4) que en NF; debemos ahora estipular que F(x) no contiene variable alguna de clase.

Para la existencia de clases admitimos, además, los casos:

$$(EY)(x)[Y(x) \Longleftrightarrow F(x)],$$

siendo F(x) cualquier fórmula en la que no ocurra Y.

Wang (1950) ha demostrado que ML es consistente, si lo es NF; utiliza un método que es similar al que utilizamos en la sección 127 de *The Foundations of Mathematics* para probar la consistencia de NF respecto a FS. Por otra parte, Th. Hailperin ha demostrado que NF es finitamente axiomatizable.

Rosser y Wang (1950) han demostrado que NF no puede tener un modelo estandar; en concreto, el conjunto de todos los números naturales, como se presenta en un modelo de NF, no puede estar bien ordenado. E. Specker (1953) demostró que el axioma de elección no es consistente con NF. Por otra parte, Rosser (1953) basó su *Logic for Mathematicians* sobre las NF que muestra como, con todo, una gran parte de las matemáticas clásicas pueden establecerse en este sistema.

Pero los resultados de Rosser y Wang, y de Specker ponen de manifiesto que los sistemas NF y ML son, por decirlo así, difícilmente consistentes; por esta razón, en mi opinión, no se adaptan al programa total del logicismo.

22. Otros sistemas

Se deberían dedicar unas pocas palabras a otros sistemas que se han construido con miras a rellenar los huecos aparecidos en el sistema de *Principia Mathematica.* La posibilidad de un sistema que se base en una jerarquía no-ramificada de tipos, y por tanto que evite la introducción de un axioma de reducibilidad, fue defendida por Leon Chwistek ya en 1921. En 1922-1925, publicó su teoría de *tipos constructivos* que más tarde fue substituida por la *matemática racional,* desarrollada por Chwistek y sus discípulos, H. Hetper, J. Herzberg, y T. Skarzewski. Como sus métodos difieren ampliamente de los adoptadoss por otros lógicos, no es sorprendente que Mrs. H. C. Meyerson-Brodie y John R. Myhill defendieran interpretaciones divergentes de sus ideas.

S. Leśniewski (1929), W. V. Quine (1936), y W. Ackermann (1937 y posteriormente) construyeron sistemas lógicos que abarcaban las nociones fundamentales de la teoría de conjuntos.

La *lógica combinatoria,* iniciada por M. Schönfinkel (1924), y desarrollada en 1930 por H. B. Curry, aspira en particular a simplificar la estructura sintáctica del formalismo lógico. S. C. Kleene (1934) formalizó la aritmética en la lógica combinatoria, mientras que J. Barkley Rosser (1935) mostró cómo evitar la introducción de variables. De alguna forma relacionado con el desarrollo de la lógica combinatoria se halla la construcción del *cálculo de la conversión-lambda* de A. Church (1932), cuyo fin es evitar las paradojas lógicas y llenar los huecos encontrados en los formalismos corrientes mediantes los teoremas de Skolem, Gödel, Tarski, Church, y otros.

Lós sistemas lógicos construidos recientemente por J. B. Fitch (1942 y posteriormente) y por J. R. Myhill (desde 1949) cubren parte de las matemáticas.

Llegaríamos demasiado lejos caso de entrar en una discusión detallada de estos varios sistemas lógicos. En un manual extenso de lógica pura, esto sería inevitable. Estoy tratando aquí principalmente de los fundamentos de las matemáticas y por tanto puedo contentarme explicando tales sistemas lógicos tal como corrientemente se aplican en la formalización de las matemáticas.

23. Análisis de las paradojas semánticas

He demostrado en *The Foundations of Mathematics,* sección 103, que el sistema formal A no puede contener una cierta sentencia $T(t^*)$, que exprese que un cierto número natural t esté contenido en un cierto conjunto K. El argumento se unió al usado en la derivación de la paradoja del mentiroso. Ciertamente, puede considerarse el enunciado $T(t^*)$ como el omitido por el mentiroso; pues este enunciado puede, en cierto

sentido, interpretarse como que establece su propia falsedad.

Hay, sin embargo, una pequeña pero significante diferencia entre los dos casos. El enunciado del mentiroso (o, mejor, un enunciado más sofisticado que tenga la misma propiedad peculiar) debe aceptarse como existente; está impreso en el presente trabajo y el lector puede leerlo en voz alta, si lo desea. Por otra parte, respecto del enunciado $T(t^*)$ meramente *se suponía* su existencia; posteriormente *se probó* que el sistema formal A no podía contener un enunciado tal. De aquí se sigue que la estructura del sistema A debe, en algún aspecto, diferir esencialmente de la estructura del lenguaje ordinario.

Por otra parte, los supuestos que hacemos respecto al sistema A no parecen implicar alguna diferencia esencial entre A y el lenguaje ordinario; parecen más bien establecer una cierta similitud entre A y el lenguaje ordinario y en este sentido fue como ciertamente se propusieron.

El supuesto esencial que implica la divergencia de A respecto del lenguaje ordinario se introdujo de hecho implícitamente cuando establecimos que todo enunciado en A era verdadero o falso; los términos "*verdadero*" y "*falso*" respecto a los enunciados contenidos en A fueron usados realmente sin una definición previa, pero ya habíamos explicado los métodos de Tarski que sirven para definir esos sistemas respecto a los enunciados en sistemas formales. No es difícil aplicar y definir así la verdad y la falsedad para enunciados contenidos en A.

La consecuencia que se sigue es que, para enunciados contenidos en el lenguaje ordinario, no puede darse una definición tal; en caso contrario podríamos aplicar nuestro argumento al caso del lenguaje ordinario de la misma forma como se aplicó al sistema A

y de esta manera mostrar que el enunciados del mentiroso no existe.

Además, se sigue también como consecuencia que, si podemos dar una definición adecuada de verdad y falsedad para enunciados de cualquier sistema formal A de la clase anterior, entonces su definición no puede reproducirse en ese mismo sistema A. Esta última observación pone de manifiesto qué es lo que exactamente le sucede al lenguaje ordinario desde nuestro presente punto de vista; pues está claro que, si puede darse una definición adecuada de verdad y falsedad para sentencias contenidas en un lenguaje ordinario, entonces esa definición siempre puede reestablacerse en el lenguaje ordinario.

A pesar de los argumentos de Max Black, estoy convencido de que el análisis de Tarski de la paradoja del mentiroso es también de máxima importancia desde el punto de vista puramente filosófico. Ciertamente, Tarski no sólo estableció un método que permite construir definiciones adecuadas de verdad y falsedad para enunciados contenidos en un sistema formal A, sino que también dio una definición exacta de la noción general de una *definición adecuada de verdad y falsedad*, y mostró, basándose en esta definición, que una definición adecuada de verdad y falsedad para enunciados del lenguaje ordinario no es posible. Se sigue de ello que los argumentos de Black a este efecto son superfluos e irrelevantes; además, parece que Black pasa por alto el hecho de que la imposibilidad de realizar su desideratum de un criterio general de verdad está también implicado por el resultado de Tarski.

Volvamos ahora a la paradoja de Berry. Será de nuevo útil intentar derivar su análogo para un sistema formal A como el que se describe en la sección 103 de *The Foundations of Mathematics*. Introducimos la definición siguiente:

El número de Berry b(A) para el sistema formal A es el menor número natural que no puede definirse mediante una fórmula de A que no contenga más de cincuenta símbolos elementales.

No se presenta paradoja alguna, por cuanto que los dos enunciados:

(i) b(A) no puede definirse mediante una fórmula de A que no contenga más de cincuenta símbolos elementales;

(ii) b(A) se ha definido mediante una sentencia de un lenguaje ordinario que contiene sólo 35 palabras; no se contradicen entre sí.

No obstante, entrando en detalle y refinando el argumento, podemos obtener un resultado más interesante. Establecemos la definición siguiente:

El número natural n tendrá la relación de Berry B(A) respecto al número natural m, si puede definirse mediante una fórmula de A que no contenga más de m símbolos elementales.

Supongamos ahora que la relación de Berry B(A) es *definible* en A; esto significa que se supone que A contiene una fórmula:

$$U(x, y) \tag{1}$$

que es satisfecha por números naturales m y n (como valores para x e y) si n tiene la relación B(A) con m, es decir, si n puede definirse mediante una fórmula de A que no contenga más de m símbolos elementales. Entonces en A habrá también una fórmula:

$$\overline{U(x, y)} \;\&\; (z)[z<y \rightarrow U(x, z)]; \tag{2}$$

para todo valor m de x existe un $n = f(m)$ de y determinado univocamente tal que m y n cumplen la fórmu-

la (2); así n será el menor número natural que no se puede definir mediante una fórmula de A que no contenga más de m símbolos elementales.

Hemos supuesto que A proporcionaba una notación a^* para cada número natural a. Así, si en la fórmula (2) reemplazamos la variable x por la notación m^* para m, obtendremos una *fórmula* de A que define el número natural $n = f(m)$, a saber:

$$(3) \qquad \overline{U(m^*, y)} \;\&\; (z)[z<y \rightarrow U(m^*, z)].$$

Supóngase que la fórmula (2) contiene p ocurrencias de la variable x y otros q símbolos elementales, y supóngase que la notación a^* para a en A contiene $d(a)$ símbolos elementales. Entonces la fórmula (3) contiene $p \cdot d\,(m) + q$ símbolos elementales; y así, como se define $n = f\,(m)$, tenemos:

$$p \cdot d(m) + q > m$$

para todo número natural m.

Ahora supóngase que A contiene la notación decimal usual para números naturales; entonces tenemos:

$$d(m) \leqq {}^{[10]}\log\, m + 1$$

y por tanto:

$$p \cdot ({}^{[10]}\log\, m) + (p + q) > m,$$

para todo número natural m; pero esta conclusión claramente contradice la bien conocida progresión paulatina de la función logarítmica. Y, por tanto:

Si un sistema formal A contiene la notación decimal usual para números naturales, entonces la relación de Berry B(A) no puede definirse mediante una fórmula U (x, y) de A.

(En lugar de suponer que A contiene la notación decimal usual para números naturales, podríamos también suponer que la adición y multiplicación de números naturales son definibles en A; no nos detendremos en este punto.)

24. La paradoja de Skolem-Löwenheim

Dejando para otro lugar el tratamiento de esta paradoja, discutiremos sólo unos pocos detalles esenciales. En particular, tendremos que responder a la siguiente cuestión: ¿cómo es posible que una teoría formalizada de conjuntos T, que contiene teoremas que establecen la existencia de conjuntos infinitos no-enumerables así como pruebas de esos teoremas, puede sin embargo tener un modelo enumerable $m = [S, \in]$?

Sea $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una enumeración de todos los elementos del conjunto S. Supongamos que la fórmula $A(x)$ de T expresa la condición, para un conjunto x, de ser infinito no-enumerable; además, supongamos que ciertas fórmulas:

$$(Ex)[B(x) \;\&\; (y)\{B(y) \rightarrow y{=}x\ \}\ ]$$

y:

$$(x)[B(x) \rightarrow A(x)]$$

son teoremas de T. Esto significa que, en T, la fórmula $B(x)$ define univocamente un cierto conjunto finito x no-enumerable. Entonces la fórmula $C(y)$, o sea:

$$(x)[B(x) \rightarrow y \in x],$$

define, en T, la noción de un elemento de y del conjunto x definido por $B(x)$.

Los elementos del "*universo*" S que cumplen la condición $C(y)$, constituirán una serie parcial $c_1, c_2, c_3,$

... de la anterior enumeración del conjunto *S*. obviamente, estos elementos representan, en *m*, los elementos *y* del conjunto *x*. Por lo tanto, aunque esté probado en T que el conjunto *x* es infinito no-enumerable, se representa en el modelo *m* por un conjunto enumerable.

Esta difícil situación puede explicarse como sigue: el conjunto *x* puede definirse en T, pero la enumeración de los elementos c_1, c_2, c_3, ... de *S* que representan los elementos *y* de *x* en el modelo *m* de T no es definible en T. Ciertamente, si pudiera definirse esta enumeración en T entonces, obviamente, esta teoría se volvería inconsistente y así T no tendría modelo alguno.

Por el teorema de Löwenheim-Skolem, las pruebas de categoricidad que pueden darse para ciertas teorías (por ejemplo, la aritmética formalizada) tiene sólo un significado relativo. Tales pruebas de categoricidad exigen apelar, explícita o implícitamente, a una teoría de conjuntos subyacente. Por tanto, esas pruebas sólo implican el isomorfismo de cualesquiera dos modelos *M* y *M'*, para la teoría en cuestión que se ha construido, a uno y el mismo modelo de la teoría de conjuntos subyacente. (La misma situación se presenta cuando en la teoría general de grupos probamos la unicidad del elemento unidad; esto implica que en cada grupo tenemos sólo un elemento unidad, pero no implica que dos grupos tengan siempre en común su elemento unidad. El que los dos casos parezcan tan diferentes, reside en el hecho de que sabemos perfectamente que la teoría general de grupos tiene muchos modelos no-isomórficos, mientras que en el caso de la aritmética o la teoría de conjuntos nos inclinamos a creer que sólo puede existir un modelo.)

En conexión con esto también podríamos mencionar la construcción efectiva de Skolem de un modelo

de la aritmética elemental que no es isomórfico al modelo que usualmente tenemos (o que creemos tener) en mente.

En su forma original, el teorema de Löwenheim-Skolem y sus implicaciones paradójicas se aplican sólo a sistemas de axiomas que están formalizados en lógica elemental. Por supuesto que se ha planteado la cuestión de cuál será la situación de los sistemas de axiomas formalizados en la lógica de orden superior.

Esta cuestión ha sido considerablemente aclarada por una publicación de Leon Henkin, que también arrojó alguna luz sobre las observaciones establecidas por Skolem 25 años antes.

Henkin ha probado que un sistema de axiomas formalizado en la lógica de orden superior tiene un modelo, si y solo si es consistente; tal modelo puede, sin embargo, ser *estandar* o *no estandar*; un modelo es estandar si y solo si, siempre que todos los elementos de un conjunto *S* pertenezcan al modelo como valores posibles de la variable v_k de tipo *k*, el mismo conjunto S pertenezca también al modelo como un valor posible de las variables v_{k+1} del tipo $k + 1$.

Si un sistema de axiomas, formalizado en lógica de orden superior, tiene un modelo estandar, entonces también debe tener modelos no-estandar. Pero puede tener modelos no-estandar sin tener modelo estandar; un sistema tal se presenta en la sección 133 de *The Foundations of Mathematics*.

Las pruebas corrientes de categoricidad para la aritmética de orden superior y para teorías similares se aplican sólo a modelos estandar; además, siempre requieren una teoría de conjuntos subyacente. Se sigue de nuevo que una prueba tal de categoricidad sólo implica el isomorfismo de cualesquiera dos modelos *M*

y M' que se hayan construido en uno y el mismo modelo m de la teoría de conjuntos subyacente.

Pero tampoco este enunciado pone de manifiesto completamente la significación relativa de dichas pruebas de categoricidad. En efecto, la misma teoría de conjuntos no es categórica; de donde se sigue que la noción de modelo estandar M también es relativa al modelo m de la teoría de conjuntos subyacente.

Además, la distinción entre modelos estandar y no-estandar no puede aplicarse a modelos de la misma teoría de conjuntos. Este último hecho es en particular el que constituye el fundamento de la *relatividad teórico-conjuntista* que indicó Skolem en 1929. Pero nos podría llevar demasiado lejos el profundizar en esta fascinante materia.

25. Las paradojas de la denotación y del análisis

¿Conoces a tu padre? Sí. ¿Cómo puede ser esto? Supongamos que te presento a un hombre enmascarado y que te pregunto: "¿Conoces a este hombre?". ¿Qué dirías entonces? Por supuesto, dirías que no le conoces. Supongamos que el hombre enmascarado es tu padre. Entonces resulta que, si no le conoces, no conoces a tu padre."

Esta paradoja puede considerarse como el prototipo de las paradojas de la denotación y del análisis que, aunque ciertamente con menos profundidad que la paradoja del mentiroso, han sido discutidas recientemente con mucho detalle.

Al tratar la paradoja de la denotación (cfr. sección 11) observamos que la expresión "log 343" se origina de la expresión "log x" al sustituir "x" por "343", y que la expresión "log x" sirve para caracterizar una cierta función de la variable x; denominemos *matriz*

a cualquier expresión que de una manera similar sirva para caracterizar una función de una o más variables.

Entonces será evidente que siempre obtendremos un inferencia estricta si, en la inferencia establecida en la sección 11, reemplazamos la matriz "log x" por cualquier otra matriz; por ejemplo:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{sen } 343 < 1 \\ 343 = 7^3\end{array}}{\text{sen } 7^3 < 1}$$

Ahora bien la expresión:

"x"

no puede ser una matriz; que es esto lo que realmente sucede puede verse a partir del hecho de que de $u = v$ no se sigue que "u" = "v".

Así la única conclusión de nuestro análisis de la paradoja de la denotación parece ser la de que una expresión que contiene una variable no necesita ser siempre una matriz.

Este conocimiento elemental nos proporciona inmediatamente un método para desembrollar la paradoja del análisis. Consideremos el teorema geométrico:

La clase de los triángulos equiángulos es idéntica a la clase de los triángulos equiláteros.

Por este teorema, si en un enunciado referente a la clase de los triángulos equiángulos reemplazamos las palabras "triángulos equiángulos" por las palabras "triángulos equiláteros", obtendremos un enunciado que es lógicamente equivalente a la sentencia original. Ahora, si aplicamos esta operación al teorema en cuestión, obtenemos el teorema:

La clase de los triángulos equiláteros es idéntica a la clase de los triángulos equiláteros.

Que es, por lo tanto, lógicamente equivalente al original. Por otra parte, como el primer teorema no era trivial, podría esperarse que el segundo teorema, que le es lógicamente equivalente, tampoco fuera trivial, mientras que visiblemente es trivial.

La falacia subyacente a esta paradoja resalta inmediatamente, si le damos la forma de una inferencia; por brevedad, sea α la clase de los triángulos equiángulos, β la clase de los triángulos equiláteros; entonces obtenemos la inferencia:

el teorema "$\alpha = \beta$" no es trivial
$\alpha = \beta$

---

el teorema "$\alpha = \alpha$" no es trivial

De nuevo el error proviene de considerar:

"$\alpha = \beta$"

como una matriz, caracterizando una cierta función de α y β.

Es interesante observar que un error similar subyace a la opinión según la cual los teoremas de la matemática pura, que son lógicamente equivalentes a "1 = 1", son meras tautologías.

Volvamos, por un momento, a la paradoja; podemos dar a esta paradoja la forma de la siguiente inferencia:

Aristóteles conoce el nombre de su padre
el hombre enmascarado es idéntico a su padre

Aristóteles conoce el nombre del hombre enmascarado.

Una vez más se ha cometido la falacia de considerar la expresión "el nombre de x" como una matriz.

26. Conclusión

Me he limitado a hacer una exposición de lo que puede denominarse la perspectiva ortodoxa respecto a las paradojas de la lógica y de las matemáticas. Podría haber mencionado las opiniones divergentes que un número de autores han defendido, pero dichas opiniones heterodoxas, aunque frecuentemente muy agudas, resultan en muchos casos de poco valor en la importancia metodológica de las paradojas y de un olvido del patrón de rigor que es característico de la lógica formal contemporánea.

APÉNDICE*

SELECCIÓN DE TEXTOS

PARADOJA DE BURALI-FORTI (1897)

"§ 9. *Consecuencias de la proposición A.* Supongamos que la proposición A es verdadera y veamos qué proposiciones lógicas se siguen de ella.

Proposición 30. $A \in \text{No} \,.\, \supset \,.\, a + 1 > a.$

Prueba. Sea (u, h) una clase perfectamente ordenada que tiene a para su número ordinal y sea v una clase que contiene precisamente un elemento. Si escribimos

$$P = (u, h) \quad \text{y} \quad Q = (u, h)\text{S}(v, \wedge),$$

tenemos $P < Q$. La proposición 30 será probada si, usando la proposición B, podemos probar que $P \text{—} \sim Q$. Si P no tiene último elemento, entonces $P \text{—} \sim Q$, porque Q tiene un último elemento, a saber, $\breve{\imath}v$. Si P tiene un último elemento, x, entonces existe (§ 3) un elemento y de u que no tiene predecesor inmediato y es tal que los elementos $(u \cap hy) \cup \iota y$ forman una clase finita de n elementos; entonces, si $P \sim Q$, las clases P_1 y Q_1 que se obtienen cuando eliminamos los últimos elementos n de P y Q serán también equivalentes; pero esto es absurdo, porque P_1 no tiene último elemento y Q_1 tiene y como último elemento. Por consiguiente, $P \text{—} \sim Q$, y en consecuencia la proposición 30 es válida. Si, siguiendo a Cantor, llamamos tipo de orden de una clase bien ordenada a un número ordinal, observamos que la proposición 30 no es verdadera

---

* La presente selección y traducción de textos y la bibliografía que le sigue se deben a AMADOR ANTÓN.

en general, tal como inmediatamente se sigue del ejemplo presentado al final del § 3"...

..."§ 10. *Conclusión.* Si escribimos Ω para *a* en la proposición 30 (que es $a \in \text{No} \,.\, \supset \,.\, a + 1 > a$) y Ω + 1 para *a* en la proposición 35 (que es $a \in \text{No} \,.\, \supset \,.\, a \overline{\geqq} \Omega$), entonces, en virtud de las proposiciones 34 (que es $\Omega \in \text{No}$), 26 (que es $1 = \bar{\imath}\ \text{T}`\{\text{Ko} \cap \overline{(u, h)} \in (u \in \text{Un})\}$ y 29 (que es $a, b \in \text{No} \,.\, \supset \,.\, a + b \in \text{No}$), tenemos

$$\Omega + 1 > \Omega \quad \text{y} \quad \Omega + 1 \leqq \Omega,$$

y éstas, por las proposiciones 21 (que es $a = b \,.\, a < b \,.=.\, \Lambda$) y 22 (que es $a < b \,.\, a > b \,.=.\, \Lambda$), resultan contradictorias.

Por consiguiente, si suponemos la proposición *A*, llegamos a un absurdo y, por tanto, ha sido rigurosamente probado que existen al menos dos tipos de orden *a* y *b* (y existe ciertamente alguno entre los números ordinales) de modo que *a* no es igual a *b*, no es mayor que *b* y no es menor que *b*.

Resulta por tanto imposible ordenar los tipos de orden en general, o incluso los números ordinales en particular; esto quiere decir que los tipos de orden no pueden proporcionar una clase *standard* para las clases ordenadas, como la clase de los enteros, ordenados según la magnitud, hace para las clases finitas y la clase enumerable (esto es, la clase del tipo de orden ω)."...

(Burali-Forti, C. "Una questione sui numeri transfiniti," *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* vol. 11, 1897, pp. 162-164)

Paradoja de Cantor (1899)

Carta de Cantor a Dedekind (28 de julio de 1899):

..."Como Usted sabe, hace algunos años que he llegado a una secuencia bien ordenada de las cardinalidades o números cardinales transfinitos, que llamo "aleph":

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_{\omega_0}, \ldots.$$

$\aleph_0$ expresa la cardinalidad de los conjuntos "enumerables" en el sentido usual, $\aleph_1$ es el siguiente número cardinal mayor, $\aleph_2$ es el siguiente mayor, y así sucesivamente; $\aleph_{\omega_0}$

es el que sigue (esto es, el siguiente mayor) a todos los $\aleph_\nu$ y es igual a

$$\lim_{\nu \to \omega_0} \aleph_\nu,$$

y así sucesivamente.

La gran cuestión era si, además de los aleph, existían aún otras cardinalidades de conjuntos; desde hace dos años dispongo de la prueba de que no existen otras, de modo que, por ejemplo, el continuo lineal de la aritmética (la totalidad de todos los números reales) tiene un aleph definido como su número cardinal.

Si partimos de la noción de una multiplicidad definida (un sistema, una totalidad) de cosas, es necesario, como yo he descubierto, distinguir dos clases de multiplicidades (con ello siempre significo multiplicidades *definidas*).

Una multiplicidad puede ser tal que la suposición de que *todos* sus elementos "están juntos" conduce a una contradicción, de modo que es imposible concebir la multiplicidad como una unidad, como "una cosa terminada". A tales multiplicidades las llamo *infinitas absolutamente* o *multiplicidades inconsistentes.*

Como fácilmente podemos ver, la "totalidad de cualquier cosa pensable", por ejemplo, es una tal multiplicidad; más adelante aparecerán otros ejemplos.

Si por otra parte, la totalidad de los elementos de una multiplicidad pueden ser considerados sin contradicción como "siendo juntos", de forma que pueden reunirse todos en "una cosa", la llamo una *multiplicidad consistente* o un "conjunto". (En francés y en italiano esta noción se expresa acertadamente por las palabras "ensemble" e "insieme.)"...

(Cantor, G. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Berlin, 1932, pp. 443-444)

Carta de Cantor a Dedeking (31 de Agosto de 1899):

... "Adscribiremos "conjuntos" equivalentes a una y la misma *clase* potencia, mientras que los conjuntos no equivalentes serán adscritos a clases distintas. Consideremos el sistema

S de todas las clases pensables.

Al mismo tiempo entiendo por α el número cardinal o potencia de los conjuntos de la clase en cuestión, que es una y la misma para todos estos conjuntos.

Sea $M\mathfrak{a}$ cualquier conjunto determinado de la clase α.

Yo sostengo que el sistema *S,* bien definido o totalmente determinado, no es *ningún "conjunto"*.

Demostración. Si *S* fuera un conjunto, entonces

$$T = \Sigma M\mathfrak{a},$$

efectuándose esta suma sobre todas las clases α, sería también un *conjunto;* asimismo *T* pertenecería a una clase determinada, queremos decir a la clase α_o.

Pero ahora vale la siguiente proposición:

"Si *M* es un conjunto cualquiera del número cardinal α, entonces puede siempre derivarse de él otro conjunto *M'*, cuyo número cardinal α' es mayor que α".

Yo he demostrado esta proposición para los casos que más nos conciernen: que α es igual a $\aleph_0$ (enumerabilidad en el sentido usual de la palabra) y que es igual a $\mathfrak{c}$ donde $\mathfrak{c}$ significa la potencia del continuo aritmético. La demostración la he llevado a cabo mediante un *procedimiento uniforme* en el *primer* tomo de las Actas de la "Deutsche Mathematikervereinigung". Dicho procedimiento es susceptible de ser aplicado *sin la menor dificultad* a un α cualquiera. La significación de este método se deja expresar simplemente mediante la fórmula

$$2^{\mathfrak{a}} > \alpha.$$

Sea, según esto, α'_o cualquier número cardinal que sea mayor que α_o. Entonces *T,* con la potencia α_o, contiene como parte al conjunto $M\mathfrak{a}'_o$, cuya potencia α'_o es superior, lo cual es una contradicción.

Así, pues, el sistema *T,* y por ende tampoco el sistema *S,* no es *ningún conjunto. Hay por tanto* determinadas pluralidades, que *no son al mismo tiempo unidades,* esto es, pluralidades tales que en ellas es *imposible* un real

"ser conjunto de todo sus elementos". Estas pluralidades son las que yo llamo "sistemas inconsistentes", mientras que a las otras las denomino "conjuntos".

(Cantor, G., o.c., p. 448.)

Paradoja de Richard (1905)

"Voy a definir un cierto conjunto de números que voy a llamar el conjunto *E,* con la ayuda de las siguientes consideraciones:

Escribamos todas las variaciones de las veintiséis letras del abecedario francés tomadas de dos en dos, ordenándolas por orden alfabético; luego, todas las variaciones tomadas de tres en tres, por orden alfabético; luego, de cuatro en cuatro, etc. Estas variaciones pueden contener la misma letra repetida varias veces; son combinaciones con repetición.

Para cualquier número entero *p,* cualquier variación de las ventiséis letras tomadas de *p* en *p,* se encontrará en esta tabla, y como todo lo que puede escribirse con un número finito de palabras es una variación de letras, todo lo que puede escribirse se encontrará en la tabla, de la que acabamos de indicar cómo se forma.

Como la definición de un número se forma con palabras y éstas con letras, algunas de estas variaciones habrán de ser definiciones de números. Tachemos de nuestras variaciones todas aquellas que no sean definiciones de números.

Sean u_1 el primer número definido mediante una variación, u_2 el segundo, u_3 el tercero, y así sucesivamente.

Podemos tener así, escritos en un determinado orden, *todos los números definidos por medio de un número finito de palabras.*

Por lo tanto, todos los números que se pueden definir mediante un número finito de palabras, forman un conjunto infinito enumerable.

Y aquí es donde reside la contradicción. Podemos formar un número que no pertenezca a este conjunto. "Sea *p* el n^{mo} decimal del n^{mo} número del conjunto *E;* formemos un número que tenga 0 como parte entera, $p + 1$ como n^{mo} decimal, si *p* no es igual a 8 ni a 9, y en caso contrario la unidad".

Este número N no pertenece al conjunto E. Si fuera el n^{mo} número del conjunto E, su n^{ma} cifra sería la n^{ma} cifra decimal de este número, cosa que no es.

Llamo G al grupo de letras entrecomilladas.

El número N se define por medio de las palabras del grupo G, esto es, mediante un número finito de palabras; por lo tanto, debía pertenecer al conjunto E. Pero, hemos visto que no pertenece a él.

Esta es la contradicción." ...

(Richard, J. "Les principes des mathématiques et le problème des ensembles," *Revue générale des sciences pures et appliquées,* vol. 16, 1905, p. 541. Reimpreso en *Acta Mathematica,* vol. 30, 1906, pp. 295-296)

Paradoja de Russell

1. Formulación inicial (1902):

Carta de Russell a Frege (16 de Junio de 1902):

... "Existe justamente un punto en el que he encontrado una dificultad. Usted establece (p. 17) que una función también puede actuar como elemento indeterminado. Eso mismo pensaba yo antes, pero ahora este punto de vista me parece dudoso por la siguiente contradicción. Sea w el predicado: ser un predicado que no puede ser predicado de sí mismo. ¿Puede w ser predicado de sí mismo? De cada respuesta se sigue su contrario. Por lo tanto, debemos concluir que w no es un predicado. Del mismo modo, no existe la clase (como una totalidad) de aquellas clases que, tomadas cada una como una totalidad, no pertenecen a sí mismas. De donde concluyo que, bajo ciertas circunstancias, un conjunto definible no forma una totalidad ...

...Esta contradicción, expresada en terminología de Peano, vendría a ser así:

$$w = \text{cls} \cap x \ni (x \sim \varepsilon x) .\supset: w \varepsilon w .=. w \sim \varepsilon w.$$

He escrito a Peano sobre esta cuestión, pero aún no me ha contestado."

(Cfr. Van Heijenoort, J., "From Frege to Gödel", *A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931,* Cambridge, Mass. 1967, pp. 124-125.)

Carta de Frege a Russell (22 de Junio de 1902):

... "Su descubrimiento de la contradicción me produjo la mayor sorpresa, incluso, yo diría, la mayor consternación, porque ha hecho tambalear los cimientos sobre los que yo intentaba construir la aritmética. Parece, pues, que transformar la generalización de una igualdad en otra igualdad de cursos de valores (§ 9 de mis *Grundgesetze*) no está permitido siempre, que mi Regla V (§ 20, p. 36) es falsa, y que mis explicaciones en el § 31 no son suficientes para asegurar que mis combinaciones de signos tengan significación en todos los casos. Tengo que reflexionar nuevamente sobre la cuestión. Es una cuestión muy seria desde que, con la pérdida de mi Regla V, parece desvanecerse no sólo la fundamentación de mi aritmética, sino también la única fundamentación posible de la aritmética. A pesar de todo, pienso que debe ser posible establecer las condiciones para la transformación de la generalización de una igualdad en otra igualdad de cursos de valores de forma que lo esencial de mis pruebas permanezca intacto. En todo caso, su descubrimiento es muy notable y se convertirá quizás en un gran avance de la lógica, aunque a primera vista parezca molesto.

El segundo volumen de mis *Grundgesetze* está próximo a aparecer. No cabe duda de que tendré que añadir un apéndice en donde su descubrimiento se tenga en cuenta" ...

(Cfr. o. c., pp. 127-128.)

2. Formulación standard (1908):

..."1. Sea w la clase de todas aquellas clases que no son miembros de sí mismas. En ese caso, cualquiera que pueda ser la clase x, "x es una w" equivaldrá a "x no es un x." En consecuencia, dando a x el valor w, "w es un w" equivaldrá a "w no es un w.

2. Sea T la relación que subsiste entre dos relaciones R y S siempre que R no guarde la relación R respecto de S. En ese caso, cualesquiera que puedan ser

las relaciones *R* y *S*, "*R* guarda la relación *T* respecto de *S*" equivaldrá a "*R* no guarda la relación *R* respecto de *S*." Por tanto, dando a la vez el valor *T* a *R* y a *S*, "*T* guarda la relación *T* respecto de *T*" equivaldrá a "*T* no guarda la relación *T* respecto de *T*." ...

(Russell, B. "Mathematical logic as based on the theory of types," *American journal of mathematics*, vol. 30, 1908, pp. 222-223)

BIBLIOGRAFÍA

Sobre las paradojas lógicas y de la teoría de conjuntos

ACKERMANN, W., "Widerspruchsfreier Aufbau der Logik: 1. Typenfreies System ohne Tertium non datur," *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 15, 1950.

BEHMANN, H., "Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 40, 1931, pp. 37-48.

———, "The Paradoxes of Logic," en *Mind*, vol. 46, 1937, pp. 218-221.

———, *Muss die Logik Paradox sein?*, en "Actes du II Congrès International de l'Union Internationale de Philosophie des Sciences", vol. II, Paris, 1955, pp. 97-108.

BETH, EVERT W., *The Foundations of Mathematics. A study in the philosophy of science*. Amsterdam: North-Holland, 1959, pp. 479-518.

———, *Some Remarks on Dr. Perelman's Essay on Logical Antinomies*, en "Mind", vol. 45, 1936, pp. 487-488.

BOCHEŃSKI, I. M., *Historia de la Lógica Formal*, versión castellana de Millán Bravo Lozano, Madrid: Gredos, 1966, pp. 403-417.

BOCHVAR, D. A., "To the question of paradoxes of the mathematical logic and theory of sets," *Recueil math. (USSR)*, vol. 15, 1944, pp. 369-384.

CARNAP, R., "Die Antimonien und die Unvollständigkeit der Mathematik," en *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 41, 1934, pp. 263-284.

CHWISTEK, L., "Ueber die Antinomien der Prinzipien der Mathematik," en *Mathematische Zeitschrift*, vol. 14, 1922, pp. 236-243.

FRAENKEL, A., *Zehn Vorlesungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Leipzig-Berlin 1927.

———, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3.ª edición, Berlin, 1928.

FRANKEL, A. & BAR-HILLEL, Y., "Le problème des antinomies et ses développements récents," *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 46, 1939, pp. 225-242.

———, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1958, pp. 1-18.

GREBE, W., "Die logischen Paradoxien und der logische Urtatbestand," en *Zeitschrift für deutsche Kulturphilosophie*, vol. 6, 1940, pp. 208-230.

GRELLING, K., "Der Einfluss der Antinomien auf die Entwicklung der Logik im 20 Jahrundert," en "Travaux du IX Congrès International de Philosophie", 1937, fasc. VI, pp. 8-17.

———, "The Logical Paradoxes," en *Mind*, vol. 45, 1936, pp. 481-486.

HELMER, O., "Remarques sur le problème des antinomies," en *Philosophisches Jahrbuch der Görresgesellschaft*, Munich, vol. 47, 1934, pp. 421-424.

HINTIKKA, K. J. J., "Vicious circle principle and the paradoxes," *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 22, 1957.

KLEENE, S. C., *Introducción a la metamatemática*, versión castellana de M. Garrido, con la colaboración de R. Beneyto, J. Sanmartín y E. Casabán, Madrid: Tecnos, 1974, pp. 43-51.

KORSELT, A., "Paradoxien der Mengenlehre" en *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 15, 1906, pp. 215-219, y vol. 14, 1905, pp. 365-389.

KUTSCHERA, F. von, "*Die Antinomien der Logik*", Semantische Untersuchungen, Munich: Alber, 1964, pp. 11-74.

LADRIERE, J., *Les limitations des formalismes*, Lovaina: Nauwelaerts 1957.

LEVI, B., "A propósito de la Nota del Dr. Pi Calleja. Sobre Paradojas Lógicas y Principio del Tertium Non Datur," en *Mathematicae notae*, vol. 9, 1949, pp. 155-159.

PERELMAN, CH., "Les paradoxes de la logique," en *Mind*, vol. 45, 1936, pp. 204-208.

QUINE, W. V., *Mathematical Logic*, ed. revisada, Cambridge, Mass., 1951.

REACH, K., "The Name Relation and the Logical Antinomies," en *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 3, 1938, pp. 97-111.

RIVETTI BARBÓ, F., "L'origine dei paradossi ed il regresso all'infinito," en *Rivista di filosofia neo-scolastica*, vol. 51, 1959, pp. 27-60.

RUSSELL, B., *The Principles of Mathematics* I, 2ª ed., Londres-Nueva York, 1938.

———, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, 1919.

———, "Les paradoxes de la logique," en *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 14, 1906, pp. 627-650.

SPECKER, E., "Die Antinomien der Mengenlehre", en *Dialectica*, vol. 8, 1954, pp. 234-244.

URBACH, B., "Das logische Paradoxon," en *Annalen der Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 6, 1927-28, pp. 161-176, 265-273.

———, "Ueber das Wesen der logischen Paradoxa," en *Zeitschrift für Philosophie und philosophiche Kritik*, vol. 140, pp. 81-108.

USHENKO, A. P., "A Modification of the Theory of Types," en *Monist*, vol. 44, 1934, pp. 147-149.

VAN HEIJENOORT, J., *From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967, XII + 660 págs.

———, "Logical Paradoxes", en *The Encyclopedia of Philosophy*, Edwards, P., 8 vols., Nueva York, 1967, pp. 45-51 del vol. 5.

VEATCH, H. B. & YOUNG, T., "Metaphysics and the Paradoxes," en *The Review of Metaphysics*, vol. 6, 1952, pp. 199-218.

WANG, HAO & MCNAUGHTON, R., *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles*, Paris, 1953.

Sobre paradojas semánticas

HERZBERGER, H., "Paradoxes of Grounding in Semantics", en *The Journal of Philosophy*, vol. 67, n.º 6, 1970, pp. 145-167.

PEANO, G., "Additione." *Revista de matematica*, vol. 8, 1902-1906, pp. 143-157.

RAMSEY, F. P., "The Foundations of Mathematics." *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2ª serie, vol. 25, 1926, pp. 338-384. Reimpreso en *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Nueva York y Londres, 1931.

TARSKI, A., "Logic, Semantics, Metamathematics," *Papers from 1923 to 1948*, Oxford: Clarendon Press, 1956.

———, "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen." *Studia Philosophica*, vol. 1, 1936, pp. 261-405.

THOMSON, J. F., "On Some Paradoxes," en *Analytical Philosophy*, Butler, R. J., Oxford: Blackwell, 1962, pp. 104-119.

WANG, HAO, "Undecidible sentences generated by semantical paradoxes", en *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 20, 1955, pp. 31-43.

Sobre la paradoja del mentiroso

BAR-HILLEL, Y., "The Revival of 'The Liar'," en *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 8, 1947, pp. 245-253.

———, "New Light on the Liar," en *Analysis*, vol. 18, 1957, pp. 1-6.

ISSMANN, S., "Le paradoxe du menteur dans les langages naturels," en *Logique et Analyse*, vol. 2, 1960, pp. 11-14.

KOYRÉ, A., "The Liar," en *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 6, 1946, pp. 344-362.

LANGFORD, C. H., "On Paradoxes of the Type of the Epimenides," en *Mind*, vol. 56, 1947, p. 350.

LIPPS, H., "Bemerkungen zu der Paradoxie des 'Lügners'," en *Kant-Studien*, vol. 28, pp. 335-339.

PRIOR, A. N., "Epimenides the Cretan," en *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 23, 1958, pp. 261-666.

RIVETTI BARBÓ, F., *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo*, Da Peirce a Tarski, Milán: Vita e Pensiero, 1961, pp. XLIII-764.

RÜSTOW, A., *Der Lügner: Theorie, Geschichte und Auflösung*. Leipzig, 1910.

Sobre la paradoja de Burali-Forti

BURALI-FORTI, C., "Una questione sui numeri transfiniti." *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol. 11, 1897, pp. 154-164.

———, "Sulle classi ben ordinate." *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol. 11, 1897, pp. 154-164.

MIRIMANOFF, D., "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles," en *L'Enseignement Mathématique*, vol. 19, 1917, pp. 37-52.

QUINE, W. V., "Element and number", en *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 6, 1941, pp. 135-149.

RUSSELL, B., "Théorie générale des séries bien-ordonnées," en *Revue de Mathématiques*, vol. 8, 1902, pp. 12-43.

Sobre la paradoja de Cantor

CANTOR, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin, 1932; Hildesheim, 1962, pp. 443-449.

GÖDEL, K., "What is Cantor's continuum problem?", en Benacerraf, P. & Putnam, H. "Philosophy of Mathematics," *Selected readings*, Oxford: Blackwell, 1964, pp. 258-273.

MIRIMANOFF, D., "Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes," *L'Enseignement Mathématique*, vol. 19, 1917, pp. 209-217, y vol. 21, 1920, pp. 29-52.

JOURDAIN, P. E. B., "On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates." *Philosophical Magazine*, Serie 6, vol. 7, pp. 61-75.

Sobre la paradoja de Richard

CHURCH, A., "The Richard paradox," *The American Mathematical Monthly*, vol. 41, 1934, pp. 356-361.

RICHARD, J., "Les Principes des mathématiques et le problème des ensembles." *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, 1905, p. 541. Reimpreso en *Acta Mathematica*, vol. 30, 1906, pp. 295-296.

———, "Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur l'axiome Zermelo," *L'Enseignement mathématique*, vol. 9, 1907, pp. 94-98.

Sobre la paradoja de Berry

BETH, E. W., *The Foundations of Mathematics, A study in the philosophy of science*, Amsterdam: North-Holland, 1959, pp. 486-487.

RUSSELL, B., "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types." *American Journal of Mathematics*, vol. 30, 1908, p. 223.

Sobre la paradoja de Grelling

GREGORY, J. C., "Heterological and homological," en *Mind*, vol. 61, 1952, pp. 85-88.

GRELLING, K. & NELSON, L., "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti." *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, N.S. Vol. 2, 1908, pp. 301-334.

MACKIE, J. L. & SMART, J. C., "A Variant of the 'Heterological' Paradox," en *Analysis*, vol. 13, 1953, pp. 61-65.

———, "A Variant of the 'Heterological' Paradox. A further note," en *Analysis*, vol. 14, 1954, pp. 146-149.

MEAGER, R., "Heterologicality and the Liar," en *Analysis*, vol. 16, 1956, pp. 131-138.

RYLE, G., "Heterologicality," en *Analysis*, vol. 11, 1951, pp. 45-53.

SAARNIO, U., "The symbological solution of the heterological paradox," en *Ajatus*, vol. 9, 1938, pp. 149-160.

Sobre la paradoja de Russell

BEHMANN, H., "Das Russellsche Paradoxon und die formale Logik," Comunicación al XII Congreso Internacional de Filosofía, Venecia, 12-18 septiembre 1958, en *Atti*, vol. V, pp. 45-54.

FREGE, G. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 2; reimpreso 1962, Olms, Hildesheim, en el Apéndice.

GRATTAN-GUINNESS, I., "Bertrand Russell on his paradox and the multiplicative axiome. An unpublished letter to Philip Jourdain," en *Journal of Philosophical Logic*, vol. 1, 1972, pp. 103-110.

QUINE, W. V., "On Frege's way out," en *Mind*, vol. 64, 1955, pp. 145-159.

RIVETTI BARBÒ F., "Le antinomie concettuali ed il paradosso di Russell," en *Rivista di filosofia neo-scolastica*, vol. 49, 1957, pp. 146-180.

RUSSELL, B., "Mathematical Logic as based on the Theory of Types," en *American Journal of Mathematics*, vol. 30, 1908, pp. 222-262.

———, "Letter to Frege, 1902," en Van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* A source book in mathematical logic, 1879-1931, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967, pp. 124-125.

———, "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types." *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2.ª serie, vol. 4, 1906, pp. 29-53.

SOBOCIŃSKI, B., "L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski," en *Methodos*, 1949, pp. 94-107, 220-228, 308-316; 1950, pp. 237-257.

WEISS, P., *The Theory of Types*, en "Mind," vol. 37, 1928, pp. 338-348.

WHITEHEAD, ALFRED NORTH & RUSSELL, BERTRAND, *Principia Mathematica*, 3 vols. Cambridge, 1910-1913, vol. I, pp. 60-65.

Sobre la paradoja de Zermelo-König

KÖNIG, J., "Zum Kontinuum-Problem," *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13*, Agosto 1904, pp. 144-147.

———, "Zum Kontinuum-Problem," *Mathematische Annalen*, vol. 60, 1905, pp. 177-180.

———, "Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem," *ibid.*, vol. 61, 1905, pp. 156-160.

———, "Über die Grundalgen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem," *ibid.*, vol. 63, 1906, pp. 217-221.

ZERMELO, E., "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann," *Mathematische Annalen*, vol. 59, 1904, pp. 514-516.

———, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I," *ibid.*, vol, 65, 1908, pp. 261-281.

———, "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *ibid.*, vol. 65, 1908, pp. 107-128.

Sobre la paradoja de Skolem-Löwenheim

LÖWENHEIM, L., "Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkul," *Mathematische Annalen*, vol. 68, 1910, pp. 169-207.

———, "Über Möglichkeiten im Relativkalkül," *ibid.*, vol. 76, 1915, pp. 447-470.

SHEPHERDSON, J. C., "Inner models of set theory I-III," *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 16, 1951; vol. 17, 1952; vol 18, 1953.

SKOLEM, TH., "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre," *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923, pp. 217-232.

———, "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich," *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, no. 6. 1923, pp. 1-38.

Sobre la paradoja del análisis y la denotación

CARNAP, R., *Meaning and Necessity, A study in semantics and modal logic*, Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1947, ed. aumentada, 1956, X + 258 págs.

CHURCH, A., "The need for abstract entities in semantic analysis," *Proc. Amer. Acad.*, vol. 80, 1951.

QUINE, W. V., *Desde un punto de vista lógico*, versión castellana y prólogo de Manuel Sacristán, Ariel, Barcelona, 1962.

RUSSELL, B., *The Philosophy of*, ed. por P. A. Schilpp, Evanston-Chicago, 1944.

Sobre la paradoja de la predicción

KAPLAN, DAVID & MONTAGNE, RICHARD, "A Paradox Regained." *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 1, 1960, pp. 79-90.

QUINE, W. V., "On a So-called Paradox," en *Mind*, Vol. 62, 1955, pp. 65-67.